Cours de mathématiques
Partie I – Les fondements
MP2I

Alain TROESCH

Version du:

4 juillet 2024

Table des matières

1 Logique et raisonnements **5**

I Rudiments de logique . . . 6

I.1 Formule propositionnelles, prédicats . . . 6

I.2 Quantificateurs . . . 8

I.3 Négations . . . 9

II Principes de rédaction, modes raisonnements et démonstrations . . . 10

II.1 Composition d'un texte mathématique . . . 10

II.2 Comment construire une démonstration . . . 11

II.3 Le Modus ponens. . . . 12

II.4 Démonstration par la contraposée. . . . 12

II.5 Disjonction des cas. . . . 13

II.6 Analyse-Synthèse . . . 14

II.7 Raisonnement par récurrence . . . 15

II.8 Principe de la descente infinie (HP) . . . 18

2 Ensembles et applications **21**

I Théorie intuitive des ensembles . . . 22

I.1 Définition intuitive . . . 22

I.2 Inclusion . . . 24

I.3 Petits ensembles, cardinal d'un ensemble . . . 24

I.4 Ensemble des parties d'un ensemble . . . 25

I.5 Opérations sur les parties d'un ensemble . . . 26

I.6 Union et intersection d'une famille de sous-ensembles . . . 30

I.7 Partitions . . . 31

I.8 Produit cartésien . . . 31

I.9 Fonction indicatrice (ou caractéristique) . . . 33

II Paradoxes ensemblistes et axiomatisation . . . 34

II.1 La crise des fondements . . . 34

II.2 Tentatives d'axiomatisation . . . 35

III Applications . . . 36

III.1 Qu'est-ce qu'une application ? . . . 36

III.2 Image directe, image réciproque . . . 40

III.3 Injectivité, surjectivité, bijectivité . . . 43

3 Relations **49**
I Définitions générales . . . 49
I.1 Relations . . . 49
I.2 Définition de quelques propriétés sur les relations . . . 50
II Relations d'équivalence . . . 51
II.1 Définitions et exemples . . . 51
II.2 Classes d'équivalence, ensembles quotients . . . 52
II.3 Congruences . . . 54
III Relations d'ordre . . . 55
III.1 Définitions générales . . . 55
III.2 Minimalité, maximalité . . . 57
III.3 Le lemme de Zorn (HP) . . . 60

4 Sommes et produits **61**
I Manipulation des signes $\sum$ et $\prod$ . . . 61
I.1 Définition des notations . . . 61
I.2 Changements d'indice . . . 63
I.3 Sommation par groupements de terme (ou associativité) . . . 64
I.4 Linéarité . . . 65
I.5 Sommes télescopiques . . . 66
I.6 Cas des produits . . . 66
I.7 Sommes multiples . . . 67
I.8 Produits de sommes . . . 68
II Sommes classiques à connaître . . . 69
II.1 Somme des puissances d'entiers . . . 69
II.2 Sommes géométriques . . . 71

5 Cardinaux et dénombrement **73**
I Cardinaux des ensembles finis . . . 73
I.1 Ensembles finis et cardinaux . . . 73
I.2 Règles de calcul sur les cardinaux . . . 74
I.3 Comparaison des cardinaux en cas d'injectivité et surjectivité . . . 76
II Combinatoire . . . 77
II.1 Combinatoire des ensembles d'applications . . . 77
II.2 Combinatoire des sous-ensembles . . . 79
II.3 Formule du binôme et retour sur les sommes de puissances d'entiers . . . 82
II.4 Bijection, Déesse de la Combinatoire . . . 82
II.5 Preuves combinatoires d'identités . . . 83
III Introduction à la dénombrabilité (Spé) . . . 84

6 Nombres réels **87**
I Un mot sur $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ . . . 87
I.1 Les entiers naturels . . . 87
I.2 Les entiers relatifs . . . 89
II Nombres rationnels . . . 89
II.1 Construction de $\mathbb{Q}$ . . . 89
II.2 Relation d'ordre dans $\mathbb{Q}$ . . . 90
III Nombres réels . . . 90
III.1 De l'existence de nombres non rationnels . . . 90
III.2 L'ensemble ordonné $\mathbb{R}$ . . . 91
III.3 Valeurs absolues et parties positives, négatives . . . 92
III.4 Rappels sur les opérations et les inégalités . . . 93

III.5 Division euclidienne dans $\mathbb{R}$ . . . 96
III.6 Densité de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ . . . 97
III.7 Partie entière, partie décimale . . . 98
III.8 Représentation décimale . . . 100
IV Intervalles . . . 102
IV.1 Description des intervalles . . . 102
IV.2 Intervalles et topologie . . . 103
V Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$ . . . 106

7 Nombres complexes **109**
I Les nombres complexes : définition et manipulations . . . 109
I.1 Définition, forme algébrique . . . 109
I.2 Module . . . 112
II Trigonométrie . . . 113
II.1 Cercle trigonométrique, formules de trigonométrie . . . 113
II.2 Forme trigonométrique, et applications à la trigonométrie . . . 118
II.3 L'exponentielle complexe . . . 121
III Racines d'un nombre complexe . . . 122
III.1 Racines n-ièmes . . . 122
III.2 Cas des racines carrées : expression sous forme algébrique . . . 124
IV Nombres complexes et géométrie . . . 126
IV.1 Affixes . . . 126
IV.2 Alignement, orthogonalité, angles . . . 126
IV.3 Transformations du plan . . . 127
IV.4 Caractérisation de certains objets géométriques . . . 128

1 Logique et raisonnements

La logique est la jeunesse des mathématiques

(Bertrand Russell)

La logique est l'hygiène des mathématiques

(André Weil)

La logique n'a ni à inspirer l'invention, ni à l'expliquer ; elle se contente de la contrôler et de la vérifier.

(Louis Couturat)

En effet, l'effet fait le même effet à la cause que l'effet que la cause lui a causé de fait

(Professeur Shadoko par Jacques Rouxier)

Ce chapitre a pour but d'introduire les concepts fondamentaux des mathématiques, à savoir les bases-même du raisonnement mathématique : le but n'est pas l'étude de la logique formelle, ni même la présentation rigoureuse de cette logique formelle, mais de voir comment des rudiments de la théorie de la logique permettent une mise en forme rigoureuse de la structure de la pensée et du cheminement logique. Cependant, cette structuration ne peut en rien remplacer l'intuition comme le dit si bien René Thom :

*Car le monde des Idées excède infiniment nos possibilités opératoires, et c'est dans l'intuition que réside l'*ultima ratio *de notre foi en la vérité d'un théorème - un théorème étant, selon une étymologie aujourd'hui bien oubliée, l'objet d'une vision.*

(René Thom)

Et une dernière citation de René Thom également, pour vous inciter à ne pas abuser du formalisme stérile (le grand danger après un chapitre de logique) :

Ah oui ! Je pense que le langage est un très bon outil. Je me suis battu en mathématique contre les formalisateurs. Les formalisateurs sont des gens qui vous disent tout le temps : « Oh ! Le langage naturel est horrible, il tolère toute espèce d'ambiguïté, c'est impossible de faire des mathématiques avec ça ». Moi, je n'ai jamais fait que du langage naturel en mathématiques, plus quelques symboles de temps en temps

(René Thom)

I Rudiments de logique

I.1 Formule propositionnelles, prédicats

La logique propositionnelle est l'étude des formules abstraites qu'on peut écrire à partir d'un certain nombre de variables propositionnelles, représentées par des lettres. Nous nous contentons d'une définition restant assez vague, l'objet n'étant pas l'étude de la logique formelle, mais une bonne structuration de la pensée et de la démarche scientifique.

Définition 1.1.1 (Formule propositionnelle)

Une *formule propositionnelle* est une formule liant des propositions élémentaires représentées par des lettres (ou variables propositionnelles), à l'aide d'un certain nombre de symboles représentant des opérations logiques :

- $\wedge$: et
- $\vee$: ou
- $\Longrightarrow$: implique
- $\Longleftrightarrow$: équivalent
- $\neg$: non

À part $\neg$ qui se met devant une unique proposition, les autres symboles permettent de lier 2 propositions. Un parenthésage rigoureux est nécessaire afin de rendre l'expression non ambiguë quant à l'ordre des opérations à effectuer.

Exemple 1.1.2 (Formules propositionnelles)

Dans cet exemple, P, Q, R désignent des variables propositionnelles.

1. Ceci est une formule : $(((P \Longrightarrow Q) \vee Q) \Longrightarrow ((R \wedge P) \Longleftrightarrow \neg Q))$.
   On n'affirme pas si elle est vraie ou fausse.
2. Ceci n'est pas une formule : $(P \Longrightarrow) \vee R\wedge$

Chaque variable propositionnelle peut prendre une valeur de vérité : V (Vrai) ou F (Faux). Suivant les valeurs de vérité prises par les différentes variables propositionnelles intervenant dans la formule, une formule pourra alors être vraie ou fausse, ce qu'on déterminera en suivant les règles intuitive de véracité liées aux symboles de connection utilisés et rappelées ci-dessous :

Définition 1.1.3 (Définition de l'interprétation sémantique des connecteurs logiques)

Soit P, Q deux variables propositionnelles. Les tables de vérité des formules $\neg P$, $(P \vee Q)$, $(P \wedge Q)$, $(P \Longrightarrow Q)$ et $(P \Longleftrightarrow Q)$ sont définies par :

P	$\neg P$
V	F
F	V

P	Q	$(P \vee Q)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

P	Q	$(P \wedge Q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

P	Q	$(P \Longrightarrow Q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

P	Q	$(P \Longleftrightarrow Q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Ces tables définissent en fait le sens logique des connecteurs.

Remarque 1.1.4

1. La table de vérité de l'implication se comprend bien en considérant sa négation : dire qu'une implication $P \Longrightarrow Q$, est fausse, c'est dire que malgré le fait que l'hypothèse P soit vraie, la conclusion Q est fausse.

2. Ainsi, dire que $P \Longrightarrow Q$ est vraie ne sous-entend nullement la véracité de P. En particulier, « $P \Longrightarrow Q$ » n'est pas équivalent à « P donc Q », qui affirme la véracité de P.

   Il convient donc de faire attention à la rédaction : **le symbole « $\Longrightarrow$ » ne peut pas remplacer le mot « donc »**
3. La même remarque vaut pour l'équivalence.
4. Par ailleurs, puisque si P est faux, $P \Longrightarrow Q$ est toujours vrai, pour montrer que $P \Longrightarrow Q$ est vrai, il suffit de se placer dans le cas où P est vrai : on suppose que P est vrai, on montre que Q aussi. Cela correspond à l'interprétation « Si P est vrai, alors Q est vrai ». En revanche, on n'a pas de contrainte lorsque P est faux.
5. Ne pas confondre :
   - P est une condition suffisante à Q : $P \Longrightarrow Q$;
   - P est une condition nécessaire à Q : $Q \Longrightarrow P$;
   - P est une condition nécessaire et suffisante à Q : $P \Longleftrightarrow Q$.
6. Pour montrer une équivalence $P \Longleftrightarrow Q$, n'oubliez pas de montrer les *deux* implications $P \Longrightarrow Q$ et $Q \Longrightarrow P$. N'oubliez pas la réciproque !

Exemple 1.1.5

- « n est multiple de 6 » est une ..... pour que n soit pair mais pas une ..... .
- $x = 1$ est une ..... pour que $x^2 = 1$, mais pas une ..... . En revanche, si x est réel, $x = 1$ est une ..... pour que $x^3 = 1$.
- Si f est dérivable sur $\mathbb{R}$, $f'(0) = 0$ est une ..... pour que f admette un extremum local en 0, mais ce n'est pas une ..... .

Définition 1.1.6 (Formules équivalentes)

Deux formules A et B sont dites équivalentes (on notera $A \equiv B$) si elles prennent la même valeur de vérité l'une et l'autre, quelle que soit la distribution de vérités donnée sur l'ensemble des variables propositionnelles intervenant dans ces formules. Autrement dit, elles sont vraies et fausses sous les mêmes conditions sur les variables propositionnelles. On note alors $A \equiv B$.

Définition 1.1.7 (Tautologie)

Ce sont des formules toujours vraies (pour toute distribution de vérité).

On rappelle ci-dessous les équivalences et tautologies les plus importantes, formant la base du raisonnement et des manipulations ensemblistes.

Proposition 1.1.8 (Quelques équivalences ou tautologies)

$A, B, C, \ldots$ désignent des variables propositionnelles.

1. $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$ *(associativité). On notera simplement $A \wedge B \wedge C$, et on peut généraliser à davantage de termes.*
2. *De même pour $A \vee B \vee C$*
3. $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ *(distributivité)*
4. $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ *(distributivité)*
5. $(A \wedge (A \Longrightarrow B)) \Longrightarrow B$ *est une tautologie (modus ponens)*
6. $(A \Longrightarrow B) \equiv (B \vee \neg A)$
7. $(A \Longrightarrow B) \equiv (\neg B \Longrightarrow \neg A)$ *(contraposée)*

◁ **Éléments de preuve.**

On peut dresser des tables de vérité pour s'en assurer, mais il est beaucoup plus important d'avoir bien compris ces propriétés sous l'angle de la logique intuitive. On peut aussi remarquer que 6 entraîne 7. ▷

I.2 Quantificateurs

Dans un texte mathématique élaboré, les variables propositionnelles représentent des propositions mathématiques élémentaires : des formules, des équations, des faits mathématiques etc. Ces énoncés s'expriment souvent à l'aide de variables mathématiques, vouées à prendre des valeurs dans un ensemble. Deux propriétés particulières liés à une formule utilisant une variable peuvent être particulièrement intéressantes :

- le fait que la formule soit vraie pour toutes les valeurs possibles de la variable dans un ensemble donnée
- le fait que la formule soit vraie pour au moins une valeur de x.

Pour formuler ces propriétés, on introduit deux symboles, appelés quantificateurs :

Définition 1.1.9 (Quantificateurs)

Soit $F(x)$ une propriété dépendant d'une variable x.

- Le quantificateur universel $\forall$:
  $\forall x, F(x)$ est satisfait si et seulement si pour tout valeur possible prise par x, $F(x)$ est vraie.
- Le quantificateur existentiel $\exists$:
  $\exists x, F(x)$ est satisfait si et seulement si il existe x tel que $F(x)$ soit satisfait. Dans ce cas, même s'il n'est bien souvent pas possible d'expliciter x, on peut se donner (c'est-à-dire fixer) un x qui satisfait $F(x)$ (donc choisir un x convenable).

Remplacer une variable quantifiée par une autre (indépendante des autres variables intervenant dans la formule) ne change pas le sens de la proposition. Ainsi $\forall x, P(x)$, et $\forall y, P(y)$ sont équivalents.
Attention à bien remplacer toutes les occurrences de la variable x dans le champ d'action du quantificateur.
On dit dans ce cas que x est une **variable muette**.

Notation 1.1.10

On restreint parfois les valeurs possibles de la variable quantifiée au moment de la quantification. Si E est un ensemble, on note :

- $\forall x \in E, P(x)$: pour tout x dans E, $P(x)$ est vrai.
- $\exists x \in E, P(x)$: il existe x dans E tel que $P(x)$ soit vrai.

Remarque 1.1.11

Cette notation n'introduit pas de nouvelle notion, c'est juste une commodité d'écriture. En effet :

- $\forall x \in E, P(x)$ est équivalent à $\forall x,\ (x \in E \Longrightarrow P(x))$.
- $\exists x \in E, P(x)$ est équivalent à $\exists x,\ (x \in E) \wedge P(x)$.

Ces équivalences peuvent en fait être prises comme définition des notations précédentes.

Avertissement 1.1.12

Attention ! En général, on ne peut pas intervertir $\exists$ et $\forall$!

Remarque 1.1.13

- Quelle différence de sens faites vous entre les deux formules $\forall x,\ \exists y, P(x,y)$ et $\exists y,\ \forall x,\ P(x,y)$.

- L'une des deux formules implique l'autre. Laquelle ?
- Peut-on intervertir deux symboles $\exists$? deux symboles $\forall$?

Avertissement 1.1.14

Attention au parenthésage et à la distribution !

Exemple 1.1.15

1. Les deux formules suivantes sont-elles équivalentes : $\forall x, (P(x) \Longrightarrow Q)$ et $(\forall x P(x)) \Longrightarrow Q$? Trouver une formule parenthésée comme la deuxième, équivalente à la première.
2. Les deux formules $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ et $(\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$ sont-elles équivalentes ? et $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ et $(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x))$? Même question avec des symboles $\exists$.

Avertissement 1.1.16

Ne jamais utiliser les symboles de quantification dans une phrase : il s'agit d'un symbole mathématique, pas d'une abréviation.

I.3 Négations

Dans de nombreuses occasions, par exemple pour mener des démontrations par l'absurde ou par la contraposée, il est important de savoir nier une expression mathématique (c'est-à-dire exprimer son contraire) de façon efficace et rapide (et sans erreur !).
Cette négation peut se faire de façon purement formelle, en utilisant les règles de négation suivantes :

Propriétés 1.1.17 (Négation d'une formule)

On a les équivalences de formules suivantes (P et Q sont des formules) :

1. $\neg\neg P \equiv P$
2. $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$ *(loi de De Morgan)*
3. $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$ *(loi de De Morgan)*
4. $\neg(P \Longrightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q$
5. $\neg(P \Longleftrightarrow Q) \equiv (P \Longleftrightarrow (\neg Q)) \equiv ((\neg P) \Longleftrightarrow Q)$.

◁ **Éléments de preuve.**

La démontration se fait en comparant les tables de vérité. La 4 peut aussi se déduire de l'équivalence $P \Longrightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$. Mais encore une fois, il est plus important d'avoir bien compris ces propriétés sous l'angle de la logique intuitive. ▷

Propriétés 1.1.18 (Négation des quantificateurs)

(i) $\neg(\forall x P) \equiv \exists x(\neg P)$

(ii) $\neg(\exists x P) \equiv \forall x(\neg P)$.

◁ **Éléments de preuve.**

On se contente ici de l'interprétation intuitive évidente. Pour plus de rigueur, il faudrait une définition un peu plus formelle des quantificateurs. ▷

Remarque 1.1.19

Pour contredire une propriété universelle $\forall x, P(x)$, il suffit de trouver UN contre-exemple.

Remarque 1.1.20

Si l'ensemble des valeurs x possibles est un ensemble E fini, disons $E = \{x_1, \dots, x_n\}$, alors

- $\forall x \in E, P(x)$ équivaut à $P(x_1) \wedge \cdots \wedge P(x_n)$
- $\exists x \in E, P(x)$ équivaut à $P(x_1) \vee \cdots \vee P(x_n)$

De nombreuses propriétés impliquant $\forall$ et $\exists$ sont à voir comme des généralisations de propriétés similaires sur $\wedge$ et $\vee$. Vérifiez par exemple la compatibilité de la description ci-dessus avec les propriétés de négation.

Exemples 1.1.21

Niez les propositions suivantes :

1. $((A \Longrightarrow B) \wedge C) \vee \neg B$
2. $(((A \Longleftrightarrow B) \vee C) \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow A$

Exemple 1.1.22

Définition de la continuité d'une fonction f en x_0, puis négation. Exemple de la fonction H de Heaviside.

II Principes de rédaction, modes raisonnements et démonstrations

II.1 Composition d'un texte mathématique

Un texte mathématique est constitué de :

1. **définitions** : des descriptions de certains objets constituant les briques de la théorie. C'est à voir comme un raccourci de langage.
2. **résultats** : des énoncés mettant en jeu les objets définis dans la théorie, et donnant des propriétés vérifiées par ces objets. Un résultat s'énonce sous la forme $A \Longrightarrow B$. On distingue :
   - les *axiomes* : des résultats qui sont des vérités fondamentales de la théorie, et qu'on ne démontre pas (à considérer comme le cahier des charges de la théorie : on impose ces résultats, il n'y a donc pas besoin de les montrer) ;
   - les *théorèmes* : les résultats les plus significatifs, démontrés à partir des axiomes et de résultats démontrés antérieurement ;
   - les *propositions* : des résultats de moindre envergure ;
   - les *lemmes* : des résultats à voir comme des étapes vers des résultats plus consistants (résultats préliminaires, mais pouvant avoir leur intérêt en soi)
   - les *corollaires* : des conséquences assez immédiates d'autres résultats, par exemple des cas particuliers intéressants ;
3. **démonstrations** : des justifications de la véracité des résultats.
4. **conjectures** : des énoncés qu'on pense être vrais, mais qu'on n'a pas encore réussi à prouver.

Remarque 1.2.1

Un énoncé s'exprime souvent sous la forme $A \Longrightarrow B$.
La proposition A regroupe les *hypothèses*

La proposition B regroupe les *conclusions.*
Ne pas oublier de bien apprendre toutes les hypothèses d'un résultat. Par exemple, considérons le théorème suivant :
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Si f' est positive sur I, alors f est croissante sur I.
Il y a trois hypothèses dans cet énoncé : bien sûr, $f' \geqslant 0$, que personne n'oublie ; mais aussi f dérivable sur I (sans laquelle l'énoncé n'a pas de sens), et (plus souvent oubliée) le fait que I est un intervalle (sans quoi le résultat est faux !).

II.2 Comment construire une démonstration

Dans un exercice ou un devoir, c'est au candidat de construire soi-même la démonstration. Il est donc intéressant d'avoir une démarche permettant d'aborder ces démonstrations de façon logique et structurée. Bien entendu, l'application formelle de ces règles n'est pas suffisante, il faut à un moment de la démonstration apporter une ou plusieurs idées personnelles !

La construction rigoureuse repose sur la structure logique de l'énoncé à démontrer, en se basant sur les principes généraux suivants. Une formule mathématique étant construite en itérant des constructions élémentaires de ce type, il faut bien appliquer ces principes de démonstration à chaque étape de la construction, ce qui nécessite de dérouler la structure logique du résultat à montrer.

- **Prouver une implication** $A \Longrightarrow B$:
  On suppose que A est vrai, on démontre B. La rédaction commence par *« Supposons que A soit vrai »*.
  Dans certaines situations, il peut être plus simple de montrer l'implication contraposée (voir plus loin). Y penser si on bloque !
- **Prouver une équivalence** $A \Longleftrightarrow B$:
  On prouve en deux temps $A \Longrightarrow B$ et $B \Longrightarrow A$. On peut aussi raisonner par équivalences successives, mais dans ce cas, raisonner d'abord dans un sens, puis vérifier scrupuleusement qu'on peut « remonter » toutes les implications.
- **Prouver une conjonction** $A \wedge B$:
  On prouve en deux temps : on prouve A, puis on prouve B.
- **Prouver une disjonction** $A \vee B$:
  On prouve que $\neg A \Longrightarrow B$, ce qui revient à supposer que A n'est pas vrai, et à en déduire que B est vrai. On peut bien sûr intervertir A et B : un bon choix de la propriété que l'on nie peut parfois simplifier la démonstration.
- **Prouver** $\forall x A(x)$ **:**
  La proposition A doit être vraie pour tout choix de x. On pose donc un x **supposé quelconque** (c'est-à-dire sur lequel on n'impose pas de condition), et on montre que pour ce x, $A(x)$ est vérifié. Le fait d'avoir choisi x quelconque montre qu'alors $A(x)$ est vrai pour tout x.
  La démonstration débute alors systématiquement par *« Soit x ... »*, puis on démontre $A(x)$.
- **Prouver** $\exists x A(x)$:
  Montrer une propriété existentielle est souvent ce qu'il y a de plus délicat. Dans le meilleur des cas, on construit explicitement x qui convient. Pour s'aider à définir x convenable, on peut faire une analyse/synthèse (voir plus loin).

Exemple 1.2.2

Structure d'une démonstration adaptée à la formule :

$$\forall x, (A(x) \Longrightarrow \forall y, (B(y) \vee \exists z C(z))).$$

Avertissement 1.2.3

Attention ! Utiliser de façon trop systématique et trop poussée ces différentes règes peut parfois empêcher de voir la ressemblance avec une propriété du cours, et peut nuire à l'intuition. Ne pas le faire assez nuit très souvent à la rigueur de la rédaction. Il faut donc trouver un juste milieu.

Avertissement 1.2.4

La structure logique, puis les règles de la logique formelle, ne font que structurer la démonstration. Une bonne rédaction passe par une **mise en langage de ces règles** : on rédige toujours **à l'aide de phrases**, et non par un enchaînement de formules logiques absconses !

Remarque 1.2.5 (Direction d'une preuve)

C'est le but qui dirige une preuve ! On se fixe un cap, et on le garde. À aucun moment, il ne faut le perdre du vue.

Nous voyons maintenant un certain nombre de méthodes classiques de démonstration.

II.3 Le Modus ponens.

Méthode 1.2.6 (Modus ponens)

Pour que B soit vrai, il suffit que A soit vrai et que $A \Longrightarrow B$. Formellement, il s'agit d'exploiter la tautologie :

$$(A \wedge (A \Longrightarrow B)) \Longrightarrow B$$

Avertissement 1.2.7

Attention, $A \Longrightarrow B$ n'est pas suffisant. Si on veut obtenir B, il faut aussi justifier la véracité de A ! (différence entre « $\Longrightarrow$ » et « donc »)

Le *modus ponens* est donc à voir comme une formalisation du « donc », déduction logique.
La situation typique d'utilisation du *modus ponens* est l'emploi d'un théorème : celui-ci s'écrit $A \Longrightarrow B$, où A est l'hypothèse et B la conclusion. Ainsi, pour montrer B, on vérifie que l'hypothèse A est satisfaite, et on emploie le théorème $A \Longrightarrow B$. Le *modus ponens* nous permet de conclure que la conclusion B est vraie aussi.

Avertissement 1.2.8

Toujours bien préciser A et $A \Longrightarrow B$. En particulier, quand on utilise un théorème, toujours bien préciser le théorème utilisé d'une part (en donnant son nom), et la validité des hypothèses d'autre part.

Cela nécessite un apprentissage rigoureux du cours : la connaissance des hypothèses des théorèmes est aussi importante que la connaissance de leurs conclusions (c'est cette bonne connaissance des hypothèses qui assure aussi qu'on n'utilisera pas le théorème à tort et à travers dans des situations inadaptées).

II.4 Démonstration par la contraposée.

Il s'agit de l'utilisation de l'équivalence des deux propositions $A \Longrightarrow B$ et $\neg B \Longrightarrow \neg A$.

Méthode 1.2.9 (Démonstration par contraposée)

Pour montrer $A \Longrightarrow B$, on peut adopter la démarche suivante : on suppose que la conclusion B est fausse, et on montre que dans ce cas, l'hypothèse A ne peut pas être vraie. Cela revient à montrer $\neg B \Longrightarrow \neg A$.

Définition 1.2.10 (Contraposée)

L'expression $\neg B \Longrightarrow \neg A$ s'appelle la *contraposée* de $A \Longrightarrow B$.

Ce type de démonstration apparaît dans de nombreuses situations.

Exemples 1.2.11

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est pair, alors n est pair.
2. Montrer que si $x_1 + \cdots + x_n = M$, alors il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_i \geqslant \frac{M}{n}$.

Avertissement 1.2.12

Ne pas confondre la contraposée $\neg B \Longrightarrow \neg A$ et l'expression $\neg A \Longrightarrow \neg B$, qui n'est pas équivalente à $A \Longrightarrow B$, mais à sa réciproque !

Un cas particulier important de démonstration par la contraposée est le cas de la démonstration par l'absurde. Il s'agit de la situation dans laquelle A est la propriété toujours vraie. Alors $\neg A$ est la propriété toujours fausse (il s'agit d'une contradition).

Méthode 1.2.13 (Cas particulier : démonstration par l'absurde)

Pour démontrer B, il suffit de montrer que le fait de supposer que B est fausse conduit à une contradiction.

Là encore, les démonstrations par l'absurde interviennent dans des situations très diverses. La démonstration par l'absurde la plus connue est certainement la démontration de Pythagore de l'irrationnalité de $\sqrt{2}$:

Exemple 1.2.14

Démonstration de l'irrationnalité de $\sqrt{2}$.

II.5 Disjonction des cas.

Ce principe de démonstration repose sur l'équivalence suivante :

$$(A \vee B) \Longrightarrow C \equiv (A \Longrightarrow C) \wedge (B \Longrightarrow C).$$

Méthode 1.2.15 (Disjonction des cas, ou discussion)

Pour montrer $A \vee B \Longrightarrow C$, on peut séparer en deux cas : voir ce qu'il se passe sous l'hypothèse A, puis sous l'hypothèse B. Ainsi on montre que si on suppose que A est vérifié, alors C aussi, et de même, si B est vérifié, C aussi.

Un cas particulièrement important est le cas où $A \vee B$ est la proposition certaine (A et B regroupe l'ensemble de tous les cas possibles). Dans ce cas, $(A \vee B) \Longrightarrow C$ équivaut à C.

Dans de nombreuses situations, la décomposition de l'hypothèse sous la forme $A \vee B$ n'est pas donnée initialement, c'est à vous d'introduire la discussion adéquate. Par exemple, si on veut démontrer une formule propriété A pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut être amené (si la situation s'y prête) à distinguer suivant la parité de n. Cette méthode est justifiée par l'équivalence entre

$$\forall n, \quad (n \in \mathbb{N}) \Longrightarrow A \qquad \text{et} \qquad \forall n, \quad ((n \in 2\mathbb{N}) \vee (n \in 2\mathbb{N}+1)) \Longrightarrow A.$$

Exemple 1.2.16

Montrer, sans utiliser le fait qu'il s'agit du résultat d'une somme classique, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ est entier.

II.6 Analyse-Synthèse

Ce procédé de démonstration est surtout adapté pour les problèmes existentiels (montrer l'existence d'un objet vérifiant un certain nombre de propriétés). Le principe est le suivant :

Méthode 1.2.17 (Analyse-synthèse)

- Phase d'analyse (ou recherche de CN) : On suppose dans un premier temps l'existence d'un objet tel que souhaité, et à l'aide des propriétés qu'il est censé vérifier, on obtient autant d'informations que possible sur la façon de construire un tel objet.
- Phase de synthèse (ou vérification des CS) : lorsqu'on a suffisamment d'informations sur une façon de construire l'objet recherché, on construit un objet de la sorte, de façon explicite, et on vérifie qu'il répond au problème.
- Bonus : si la phase d'analyse fournit une expression explicite de l'objet recherché, ne laissant pas le choix pour cet objet, cela fournit l'unicité.

Exemple 1.2.18

Soit a un réel et $I = [-a, a]$. Montrer que toute fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ s'écrit comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Remarque 1.2.19

Cet exemple est un cas particulier d'un exemple générique consistant à prouver qu'un espace vectoriel se décompose en somme (ici somme directe) de deux sous-espaces vectoriels. Se reporter au chapitre idoine pour ces notions.

Remarque 1.2.20

Dans le cadre d'un problème existentiel sans contrainte d'unicité, la phase d'analyse ne sert qu'à deviner une expression répondant au problème. D'un point de vue de la rigueur de rédaction, cette phase n'est pas indispensable, la phase de synthèse est suffisante pour répondre au problème existentiel. Cependant, elle permet au lecteur de mieux comprendre comment on est parvenu à l'expression voulue. Sans cette phase d'analyse, la réponse peut dans certaines situations paraître un peu parachutée.

Savoir si on rédige la phase d'analyse ou non dépend en fait de la complexité de la situation. Dans certaines situations assez simples, on comprend bien l'expression obtenue, on peut parfois même la deviner sans passer par une analyse. Dans ces cas, ne vous cassez pas la tête et faites directement la synthèse.

Avertissement 1.2.21

Soyez très précautionneux dans la rédaction d'une démonstration par analyse-synthèse. Dites bien de façon explicite qu'il s'agit d'un raisonnement de ce type. En effet, comme la phase d'analyse consiste en une recherche de conditions nécessaires, elle consiste souvent à supposer la conclusion vraie pour essayer d'obtenir le maximum d'informations sur l'expression recherchée. Un lecteur pressé (et les correcteurs au concours sont à classer dans cette catégorie) risque de prendre votre démonstration pour une pétition de principe (montrer un résultat en le supposant vrai au départ !)

II.7 Raisonnement par récurrence

Le principe de récurrence est un axiome de la construction de $\mathbb{N}$. Il s'énonce ainsi :

$$\boxed{[\mathcal{P}(0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N},\ (\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1))] \Longrightarrow (\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n))}$$

« $\mathcal{P}(0)$ » est l'initialisation, « $\forall n \in \mathbb{N},\ (\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1))$ » est l'hérédité (ou le caractère héréditaire ou transmissible).

Le principe de récurrence dit en gros qu'en partant de 0 et en itérant la prise de successeur (i.e. passer d'un entier n à l'entier suivant $n+1$), on parcourt $\mathbb{N}$ tout entier. C'est en ce sens que le principe de récurrence est intimement lié à la définition axiomatique de $\mathbb{N}$, donnant en quelque sorte une propriété de minimalité de $\mathbb{N}$ parmi les ensembles munis d'un 0, stables par prise de successeur, et sans boucle.

Méthode 1.2.22 (Démonstration par récurrence simple)

Pour montrer une propriété $\mathcal{P}(n)$ dépendant d'un entier $n \in \mathbb{N}$, on procède suivant le schéma suivant :

- Initialisation : montrer que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité : montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)$, ce qui se fait, d'après les principes développés précédemment en posant n quelonque (« Soit $n \in \mathbb{N}$ »), en supposant que pour ce n, $\mathcal{P}(n)$ est vrai, et en montrant qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi.
- Conclure, en faisant référence au principe de récurrence.

Ce principe peut s'adapter à des situations légèrement différentes :

- Le rang initial peut être un autre entier (éventuellement négatif). Cela modifie aussi alors le rang initial pour le caractère héréditaire.
- On peut faire des récurrences descendantes pour une propriété $\mathcal{P}(n)$, à démontrer sur un intervalle du type $[\![-\infty, n_0]\!]$. On initialise alors avec $\mathcal{P}(n_0)$ et on montre que pour tout $n \leqslant n_0$, $\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n-1)$.
- On peut faire des récurrences bornées, pour montrer une propriété $\mathcal{P}(n)$ sur un intervalle borné, par exemple $[\![0, n_0]\!]$. On initialise alors avec $\mathcal{P}(0)$ et on montre que $\mathcal{P}(n)$ implique $\mathcal{P}(n+1)$ pour tout $n \in [\![0, n_0 - 1]\!]$. D'un point de vue purement logique, il ne s'agit pas de l'utilisation du principe de récurrence, mais d'une itération (utilisation répétée, en nombre fini, du modus ponens, par transitivité de l'implication).
- Ces récurrences bornées s'adaptent aussi au cas de récurrences descendantes.
- Nous verrons un peu plus loin deux variantes du principe de récurrence : la récurrence d'ordre k, et la récurrence forte.

Exemple 1.2.23

Montrer (par récurrence) que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Avertissement 1.2.24

N'oubliez pas l'initialisation ! Prouver l'hérédité à tout rang ne suffit pas !

Exemple 1.2.25

$10^n + (-1)^n$ est-il divisible par 11 pour tout $n \in \mathbb{N}$?

Attention aussi à bien vous assurer que l'hérédité est valable à tout rang.

Exemple 1.2.26 (Le problème des crayons de couleur)

Nous montrons dans cet exemple que tout ensemble de crayons de couleur est monochrome. Nous notons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ la propriété affirmant que tout ensemble de n crayons de couleurs est constitué de crayons ayant tous la même couleur.

- La propriété $\mathcal{P}(1)$ est trivialement vraie, ce qui initialise la récurrence
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vrai. Soit alors un ensemble de $n+1$ crayons de couleur, qu'on peut supposer numérotés de 1 à $n+1$. En appliquant l'hypothèse de récurrence aux n premiers crayons et aux n derniers crayons, le crayon 1 a la même couleur que les crayons 2 à n qui on ont aussi même couleur que le crayons $n+1$, ce qui prouve $\mathcal{P}(n+1)$ (figure 1.1)
- D'après le principe de récurrence, on peut donc conclure qu'il n'existe au monde que des crayons d'une même couleur.

Où est l'erreur ?

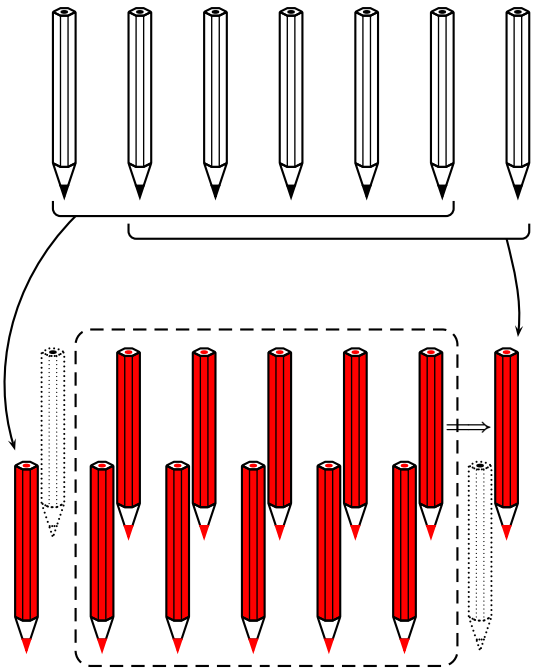


FIGURE 1.1 – Caractère héréditaire pour le problème des crayons de couleur

Méthode 1.2.27 (Récurrence d'ordre k)

Il s'agit d'une variante du principe de récurrence, s'exprimant ainsi :

$$((\mathcal{P}(0) \wedge \cdots \wedge \mathcal{P}(k-1)) \wedge (\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n) \wedge \cdots \wedge \mathcal{P}(n+k-1) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+k))) \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n).$$

- Principe : on utilise la propriété aux k rangs précédents pour montrer l'hérédité.
- Schéma de rédaction :
  - Initialisation : montrer $\mathcal{P}(0), \ldots, \mathcal{P}(k-1)$.
  - Hérédité : poser $n \geqslant 0$, supposer $\mathcal{P}(n), \ldots, \mathcal{P}(n+k-1)$, en déduire $\mathcal{P}(n+k)$.
  - Conclure en faisant appel au principe de récurrence.

Avertissement 1.2.28

Ne pas oublier d'initialiser pour les k premières valeurs ! (sinon la première implication de l'hérédité n'est pas valable)

On peut bien sûr adapter le principe dans le cas où le rang initial n'est pas 0.

Exemple 1.2.29

Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \geqslant 0$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ (suite de Fibonacci). Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n est paire si et seulement si n est multiple de 3.

Pour votre culture, ce dernier exemple est une situation particulière du résultat plus général suivant :

$$\forall (m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ F_{m\wedge n} = F_m \wedge F_n,$$

avec $m = 3$ (ici, $\wedge$ désigne le pgcd).
Voici une dernière variante du principe de récurrence :

Méthode 1.2.30 (Récurrence forte)

La récurrence forte est basée sur la propriété formelle suivante :

$$(\mathcal{P}(0) \wedge (\forall n \geqslant 1,\ \mathcal{P}(0) \wedge \cdots \wedge \mathcal{P}(n-1) \Longrightarrow \mathcal{P}(n))) \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n).$$

- Principe : on suppose la propriété vraie à tous les rangs précédents pour la montrer à un rang donné.
- Schéma de rédaction :
  - Initialisation pour $\mathcal{P}(0)$ (une seule valeur suffit ici)
  - Poser $n > 0$, supposer $\mathcal{P}(k)$ vrai pour tout $k < n$, et montrer qu'alors $\mathcal{P}(n)$ est vrai.
  - Conclure en faisant référence au principe de récurrence.

Exemples 1.2.31

On rappelle qu'un nombre $n \in \mathbb{N}^*$ est premier s'il est distinct de 1 et si ses seuls diviseurs sont 1 et n. On dit que n est composé si $n \neq 1$ et n n'est pas premier. Par définition, il existe alors d_1 et d_2 tous deux distincts de 1 tels que $n = d_1 d_2$.

1. Montrer que tout nombre entier $n \geqslant 2$ admet un diviseur premier.
2. Montrer que tout nombre entier $n \geqslant 1$ admet une décomposition en produit de nombres premiers (on rappelle que par convention, un produit vide est égal à 1).

Remarque 1.2.32

On retiendra du dernier exemple que le principe de récurrence forte est en particulier très utile dans de nombreuses questions liées à des propriétés de divisibilité.

Théorème 1.2.33

Les trois principes de récurrence ci-dessus sont équivalents

◁ **Éléments de preuve.**

Le principe de récurrence forte et le principe de récurrence d'ordre k impliquent chacun le principe récurrence simple, car qui peut le plus, peut le moins. Réciproquement, poser respectivement $\mathcal{Q}(n) = \mathcal{P}(0) \wedge \cdots \wedge \mathcal{P}(n)$ ou $\mathcal{Q}(n) = \mathcal{P}(n-k+1) \wedge \cdots \wedge \mathcal{P}(n)$ (éventuellement en complétant $\mathcal{P}(n)$ par la propriété toujours vraie pour n négatif), et appliquer le principe de récurrence simple à $\mathcal{Q}$. ▷

II.8 Principe de la descente infinie (HP)

Nous terminons sur une dernière méthode classique, plus anecdotique pour une grande part des mathématiques, mais d'une telle efficacité pour certains problèmes d'arithmétique qu'on ne peut pas ne pas la mentionner.

Méthode 1.2.34 (Descente infinie)

Le principe de la descente infinie est un mélange de démonstration par l'absurde et de démonstration par récurrence. Soit $(\mathcal{P}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ une propriété dont on veut démontrer qu'elle est fausse pour tout $n \in \mathbb{N}$: il suffit de montrer que si elle est supposée vraie à un certain rang n, il existe alors un rang $0 \leqslant m < n$ tel qu'elle soit encore vraie.

◁ **Éléments de preuve.**

En effet en itérant alors ce procédé, on pourrait construire une chaîne infinie d'entiers strictement décroissants telle que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie, ce qui est impossible d'après la propriété fondamentale de $\mathbb{N}$, ce qui amène la contradiction recherchée. ▷

Remarque 1.2.35

Formellement, le principe de descente infinie est la contraposée du principe de récurrence forte appliqué à $\neg\mathcal{P}(n)$: au lieu de montrer que si pour tout $m < n$, $\neg\mathcal{P}(m)$ est vérifié alors $\neg\mathcal{P}(n)$ l'est aussi, on montre la contraposée de cette implication : si $\mathcal{P}(n)$, alors il existe $0 \leqslant m < n$ tel que $\mathcal{P}(m)$. L'initialisation de la récurrence découle alors de cette implication pour $n = 0$: $\mathcal{P}(0)$ ne peut pas être vraie (l'existence de $0 \leqslant m < n$ amenant une contradiction).

Exemple 1.2.36

- Variante de la démonstration de l'irrationnalité de $\sqrt{2}$
- Démonstration du théorème de Fermat dans le cas où $n = 4$: il n'existe pas d'entiers non nuls x, y et z tels que $x^4 + y^4 = z^4$ (exemple non développé)

Note Historique 1.2.37

- La démonstration par l'absurde est déjà connue du temps de Pythagore (preuve de l'irrationnalité de $\sqrt{2}$)

- On trouve des prémices du raisonnement par récurrence dans les *Éléments* d'Euclide, mais cela reste très vague. La vraie naissance du raisonnement par récurrence date de 1654, lorsque Blaise Pascal écrit son *Traité du triangle arithmétique*.
- Pierre de Fermat met en place, à peu près à la même époque, le principe de la descente infinie, mélange entre le principe de récurrence et la démonstration par l'absurde. Ce type de raisonnement aussi apparaît déjà plus ou moins dans les *Éléments* d'Euclide, mais gagne vraiment sa notoriété grâce à Fermat. Il est par exemple utilisé pour montrer le grand théorème de Fermat pour l'exposant 4.

2 Ensembles et applications

Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können.

(David Hilbert)

The finest product of mathematical genius and one of the supreme achievements of purely intellectual human activity.

(David Hilbert, à propos de la théorie de Cantor)

Pour choisir une chaussette plutôt que l'autre pour chaque paire d'une collection infinie, on a besoin de l'axiome du choix. Mais pour les chaussures, ce n'est pas la peine.

(Bertrand Russell)

La notion d'ensemble semble à première vue une notion intuitive évidente, ne nécessitant pas de précautions particulières. Cette notion intuitive est à la base de toutes les mathématiques, depuis leur origine, que ce soit l'arithmétique élémentaire (ensemble d'entiers, puis de divers autres types de nombres, utilisés depuis qu'on sait compter), la géométrie d'Euclide à nos jours (une figure est un sous-ensemble du plan), l'analyse (on étudie des fonctions définies sur des ensembles), ou l'algèbre moderne (étude des structures algébriques, définies comme des ensembles munis d'un certain nombre de lois supplémentaires).

Longtemps, les mathématiciens se sont contentés de ce point de vue intuitif, sans chercher à formaliser cette notion. Ce n'est qu'à l'aube du XX^{e} siècle qu'on s'est penché sur cette formalisation, qui a bien failli faire vasciller l'édifice mathématique sur ses fondations. En effet, Cantor, puis Russell au travers de son célèbre paradoxe, ont montré qu'on ne pouvait pas se contenter de cette approche intuitive, et que celle-ci amenait des contradictions si on admettait que toute collection pouvait être un ensemble : ainsi, le paradoxe de Russell montre qu'il ne peut pas exister d'ensemble des ensembles. Les mathématiciens pensèrent même un moment qu'il n'était pas possible de donner une formalisation correcte de la notion d'ensemble ; cela aurait signifié ni plus ni moins que la faillite des mathématiques. Heureusement, au prix d'une axiomatique assez lourde, les mathématiciens logiciens de l'époque ont réussi à mettre en place cette formalisation. On peut dire que cette « crise des fondements » a marqué la naissance des mathématiques et de la logique moderne, par une formalisation systématique de toutes les notions utilisées. Depuis, l'édifice mathématique a des fondements solides et ne s'assoit plus sur des sables mouvants. Même la notion d'indécidabilité, dans un premier temps assez choquante, a fini par trouver sa place dans cet édifice solide, par une latitude qu'autorisent ces résultats indécidables dans le choix de l'axiomatique initiale. Ainsi, par exemple, l'axiome du choix dont on parlera dans la suite de ce chapitre étant indécidable (pour l'axiomatique de Zermelo-Frankel), on pourra construire deux théories mathématiques, l'une incluant l'axiome du choix, l'autre, beaucoup plus pauvre, ne l'incluant pas. Ainsi, dans certaines théories, l'axiome

du choix permet d'aller un peu, ou beaucoup plus loin, en permettant notamment de construire certains objets infinis.

En ce qui nous concerne, nous nous contenterons du point de vue intuitif. Nous souleverons tout de même les problèmes que peut engendrer ce point de vue, et nous évoquerons de façon très superficielle le problème de l'axiomatisation de la théorie des ensembles.

I Théorie intuitive des ensembles

I.1 Définition intuitive

Pour définir rigoureusement la notion d'*ensemble*, il faut une axiomatique très complexe, c'est pourquoi nous admettons cette notion. Nous nous contentons de :

Définition 2.1.1 (Ensemble, point de vue intuitif)

- Un *ensemble* E est une collection d'objets.
- Les objets dont est constituée la collection définissant E sont appelés *éléments de* E.
- On dit que x *appartient à* E si x est élément de E, et on note $x \in E$.

Note Historique 2.1.2

La notation $\in$ est introduite par l'italien Peano en 1890. Il s'agit d'un epsilon, pour désigner la lettre E de « esti » (« il est » en italien)

Il existe plusieurs façons de décrire un ensemble

Définition 2.1.3 (Définitions d'ensembles)

- Une définition *par énumération* d'un ensemble E est la donnée explicite de tous les éléments de l'ensemble : $E = \{x_1, \cdots, x_n\}$
- Une définition *par compréhension* d'un ensemble E est la donnée d'une propriété P caractérisant les éléments de E (parmi les éléments d'un ensemble plus gros F) : $E = \{x \in F \mid \mathcal{P}(x)\}$
- Une définition *par induction structurelle* de E est la donnée d'un certain nombre d'éléments de E, et d'une façon de construire, étape par étape les autres éléments de E à partir de ceux donnés.
- Une définition *par constructions* (unions, intersections) est une façon de construire un ensemble à partir d'autres ensembles (ce sera étudié dans le paragraphe suivant)

Remarques 2.1.4

1. Il n'y a pas de notion d'ordre des éléments d'un ensemble E : on peut énumérer les éléments de E dans l'ordre qu'on veut.
2. Il n'y a pas de notion de multiplicité d'un élément : un élément appartient ou n'appartient pas à un ensemble, mais il ne peut pas « appartenir plusieurs fois ». S'il apparaît plusieurs fois dans une énumération des éléments de E, attention au fait qu'il s'agit bien du même élément !
3. L'énumération des éléments d'un ensemble est généralement donnée entre accolades {...} pour désigner l'ensemble.

Exemples 2.1.5

1. Énumération : $\{1, 3, 7, 9\} = \{3, 9, 7, 1\} = \{1, 1, 3, 3, 3, 7, 9, 9\}$.

2. Compréhension : $\{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{N},\ x^2 = y\}$, ou $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 1 \geqslant 0\}$
3. Induction structurelle :
   (i) $\mathbb{N}$ (ensemble des entiers naturels) est défini par induction structurelle à partir d'un élément initial 0 et de la construction, pour chaque élément n, d'un successeur $n+1$.
   (ii) Le sous-ensemble E de $\mathbb{N}$ dont les éléments initiaux sont $2, 3$ et l'unique construction est la stabilité de E par produit (i.e. si p et q sont dans E, alors pq est dans E).
   (iii) L'ensemble $\mathcal{A}$ des arbres binaires (non complets), contenant l'arbre vide $\varnothing$, et, étant donnés deux arbres A_1, A_2 de $\mathcal{A}$, l'arbre $A = (A_1, A_2)$, constitué d'une racine à laquelle sont attachés (par leur racine) le fils gauche A_1 et le fils droit A_2 (figure 2.1). Attention, suivant les ouvrages, l'arbre vide n'est pas toujours considéré comme un arbre binaire (du fait que contrairement aux autres, il n'a pas de racine)
   (iv) L'ensemble des formules propositionnelles, défini comme sous-ensemble de toutes les chaînes de caractère, qui contient les variables propositionnelles, et stable par certaines contructions du type $A \vee B$...

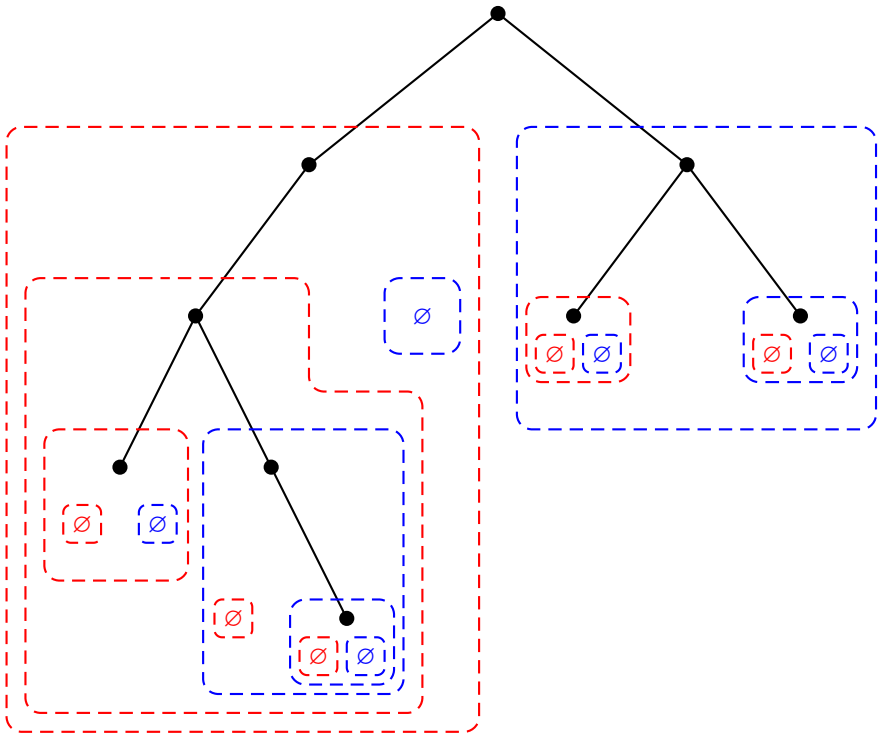


Figure 2.1 – Un arbre binaire A et sa décomposition récursive

Remarque 2.1.6

Une définition de E par induction structurelle est la donnée de certains éléments initiaux $A_1, \ldots, A_n$ de E et de certaines propriétés de stabilité $P_1, \ldots, P_k$, dépendant respectivement de $n_1, \ldots, n_k$ variables, s'exprimant de la manière suivante :

$$\forall j \in [\![1, k]\!], \forall (B_1, \ldots, B_{n_j}) \in E^{n_j},\quad P_j(B_1, \ldots, B_{n_j}) \in E.$$

Ainsi, un ensemble E défini par induction structurelle peut être appréhendé de deux façons :

- par le bas :
  On part des éléments initiaux, et on construit étape par étape des nouveaux éléments en appliquant, à chaque étape, les règles de construction aux éléments déjà obtenus.
- par le haut (possible si on connaît un ensemble F contenant E, c'est le cas du premier et du dernier exemple) :
  E est « le plus petit ensemble » contenant $A_1, \cdots, A_n$, et stable par les constuctions $P_1, \ldots, P_k$.
  Cela se traduit souvent par une intersection de tous les ensembles possédant cette propriété de stabilité.

On peut montrer que ces deux points de vue sont équivalents et définissent le même ensemble.

I.2 Inclusion

Définition 2.1.7 (Sous-ensemble, ou partie ; inclusion)

Soit E un ensemble. Un sous-ensemble de E (aussi appelé partie de E) est un ensemble F tel que tout élément de F est aussi élément de E :

$$\forall x, \quad x \in F \Longrightarrow x \in E.$$

On note $F \subset E$, et on dit que F est inclus dans E.

On a clairement, pour F, G et H des sous-ensembles d'un ensemble E :

Proposition 2.1.8 (Principe de double-inclusion)

$F = G$ si et seulement si $F \subset G$ et $G \subset F$.

Proposition 2.1.9 (Transitivité)

Si $F \subset G$ et $G \subset H$ alors $F \subset H$.

◁ **Éléments de preuve.**

Ce sont les propriétés similaires de l'implication qui sont en jeu. ▷

Les deux propriétés précédentes nous assurent que $\subset$ définit une relation d'ordre sur l'ensemble des parties de E, au sens défini dans le chapitre 5.

Avertissement 2.1.10

Attention à ne pas confondre l'inclusion $E \subset G$, reliant deux objets de même nature (des ensembles) et l'appartenance $x \in E$ reliant un élément et un ensemble. Il y a un fort risque de confusion dû à la ressemblance des notations. Il conviendra de bien faire attention en particulier dans le cas où E est lui-même un ensemble d'ensembles (c'est en fait le cas général dans l'axiomatique de la théorie des ensembles) : un élément $x \in E$ est alors un ensemble, appartenant à E mais (en général) pas inclus dans E.

I.3 Petits ensembles, cardinal d'un ensemble

Notation 2.1.11 (Ensemble vide)

L'ensemble vide, noté $\varnothing$, est l'unique ensemble ne contenant aucun élément. Il est donc défini par la propriété :

$$\forall x,\ x \notin \varnothing.$$

Proposition 2.1.12

L'ensemble vide est sous-ensemble de tout ensemble E.

◁ **Éléments de preuve.**
En effet :

$$\forall x,\quad x \in \varnothing \Longrightarrow x \in E$$

(la source de l'implication étant toujours fausse, l'implication est vraie) ▷

Terminologie 2.1.13 (singleton)

On appelle *singleton* un ensemble constitué d'un unique élément, donc de la forme $\{a\}$.

Terminologie 2.1.14 (paire)

On appelle *paire* un ensemble constitué de deux éléments distincts, donc de la forme $\{a, b\}$, avec $a \neq b$.

Définition 2.1.15 (Cardinal, notion intuitive)

Intuitivement, le cardinal d'un ensemble correspond à sa taille. Pour un ensemble fini, il s'agit du nombre de ses éléments. On note dans ce cas $\mathrm{Card}(E)$ ou $|E|$ le cardinal de E.

Exemple 2.1.16

- $\mathrm{Card}(\varnothing) = 0$.
- $\mathrm{Card}(\{\varnothing\}) = 1$.
- $\mathrm{Card}(\{a, b\}) = 1$ si $a = b$ et $\mathrm{Card}(\{a, b\}) = 2$ si $a \neq b$.

On peut définir, comme on le verra plus tard, une notion de cardinal pour des ensembles infinis, mais l'intuition en est moins évidente. Par exemple, $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ ont même cardinal !

I.4 Ensemble des parties d'un ensemble

Une partie d'un ensemble est un autre nom donné à un sous-ensemble.

Notation 2.1.17 (Ensemble des parties d'un ensemble)

On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E, c'est-à-dire l'ensemble dont les éléments sont les sous-ensembles de E : $F \in \mathcal{P}(E) \Longleftrightarrow F \subset E$.

Remarque 2.1.18

Ainsi que nous l'avons évoqué en début de section, toute collection d'éléments ne peut pas nécessairement être considérée comme un ensemble. Par exemple, on ne peut pas parler de l'ensemble des ensembles. Il n'est donc *a priori* pas évident que $\mathcal{P}(E)$ soit toujours un ensemble. En fait, cela fait partie des axiomes que l'on pose pour définir la théorie des ensembles.

Proposition 2.1.19

Pour tout ensemble E, $\varnothing \in \mathcal{P}(E)$ et $E \in \mathcal{P}(E)$. Ainsi, $\mathcal{P}(E)$ n'est jamais vide. Il contient toujours $\varnothing$ et E.

Exemples 2.1.20

Déterminer $\mathcal{P}(E)$ dans les cas suivants :

1. $E = \varnothing$
2. $E = \{1\}$
3. $E = \{1, 2, 3\}$
4. $E = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

Par commodité, nous introduisons les notations suivantes :

Notation 2.1.21 (Ensemble des parties de cardinal fixé)

Soit E un ensemble fini (à prendre au sens intuitif, ainsi que la notion de cardinal), et $k \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{P}_k(E)$ l'ensemble des parties de E de cardinal k.

Pour simplifier les écritures, nous utiliserons également les deux notations raccourcies suivantes, non universelles (donc à redéfinir) :

Notation 2.1.22 (Ensemble des parties de $[\![1, n]\!]$)

Soit n et k deux entiers naturels. On note :

1. $\mathcal{P}(n) = \mathcal{P}([\![1, n]\!])$
2. $\mathcal{P}_k(n) = \mathcal{P}_k([\![1, n]\!])$.

I.5 Opérations sur les parties d'un ensemble

Nous étudions dans ce paragraphe les constructions classiques permettant de définir des ensembles à partir d'autres. On considère dans ce paragraphe les constructions internes à $\mathcal{P}(E)$ pour un ensemble E donné : autrement dit, à partir de deux sous-ensembles A et B de E, on construit d'autres sous-ensembles de E. Dans tout ce paragraphe, E désigne un ensemble, et $A, B, C, \cdots$ désignent des sous-ensembles de E

Définition 2.1.23 (Union, intersection, différence ensembliste, complémentation)

1. **Intersection :** l'intersection de A et B, notée $A \cap B$, est l'ensemble des éléments de E contenus à la fois dans A et dans B :
$$x \in A \cap B \iff (x \in A) \wedge (x \in B).$$
Ainsi, $A \cap B = \{x \in E \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$.
2. **Union :** l'union de A et B, notée $A \cup B$, est l'ensemble des éléments de E contenus soit dans A soit dans B :
$$x \in A \cup B \iff (x \in A) \vee (x \in B).$$
3. **Différence ensembliste :** La différence ensembliste $A \setminus B$ (A privé de B, ou A moins B) est l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas dans B :
$$x \in A \setminus B \iff (x \in A) \wedge (x \notin B).$$

4. **Complémentation :** Si $B \subset A$, on appelle complémentaire de B dans A la différence $A \setminus B$. Plusieurs notations sont utilisées :

$$A \setminus B = A - B = \complement_A B = B^c = {}^cB = \overline{B}.$$

Les trois dernières notations ne faisant pas référence à A, elles sont utilisées lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'univers total A dans lequel on prend le complémentaire, généralement égal à l'ensemble E tout entier, qui est fixé dans le contexte (par exemple, la dernière notation est utilisée pour désigner l'événement contraire en probabilité).

5. **Différence symétrique :** La différence symétrique $A \triangle B$ est l'ensemble des éléments x appartenant à l'un des deux ensembles A ou B, mais pas à l'autre :

$$A \triangle B = \{x \in E \mid x \in A \setminus B \text{ ou } x \in B \setminus A\} = A \setminus B \cup B \setminus A = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Ces constructions sont illustrées dans les figures 2.2, 2.3, 2.4 et 2.5.
Un certain nombre de propriétés de l'union et de l'intersection découlent de façon immédiate des règles logiques correspondantes :

Proposition 2.1.24 (Associativité, commutativité)

1. $A \cap B = B \cap A$ *(commutativité de $\cap$)*
2. $A \cup B = B \cup A$ *(commutativité de $\cup$)*
3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ *(associativité de $\cap$)*
4. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ *(associativité de $\cup$)*

Proposition 2.1.25 (Distributivités)

L'union est distributive sur l'intersection, et réciproquement :

1. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ *(distributivité de $\cap$ sur $\cup$)*
2. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ *(distributivité de $\cup$ sur $\cap$)*

Définition 2.1.26 (Ensembles disjoints)

Deux ensembles A et B sont disjoints si $A \cap B = \varnothing$.

Avertissement 2.1.27

Attention à ne pas confondre *disjoint* et *distinct* !

Notation 2.1.28 (union de deux ensembles disjoints)

Si A et B sont disjoints, l'union $A \cup B$ peut être notée $A \sqcup B$ ou $A \uplus B$. Cette notation *affirme* que A et B sont disjoints.

Remarque 2.1.29

On parlera dans ce cas de l'union disjointe de A et de B. On prendra garde au fait que de nombreux ouvrages définissent l'union disjointe de deux ensembles de façon différente et plus générale (y compris lorsque A et B ne sont initialement pas disjoints), et réservent la notation $\sqcup$ à cet usage. S'il y a une ambiguïté à ce propos, préférer la notation $\uplus$.

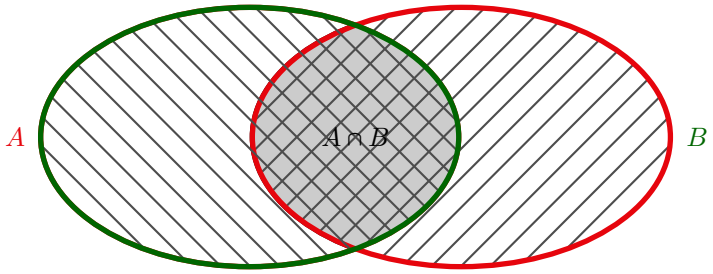


FIGURE 2.2 – Intersection de deux ensembles

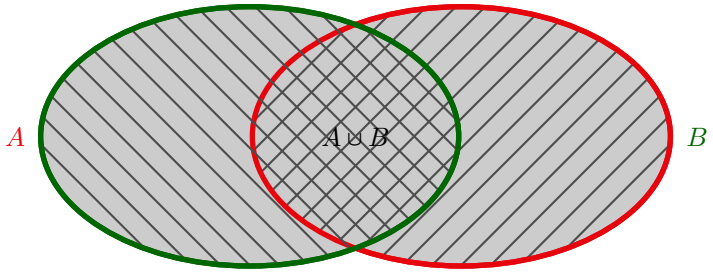


FIGURE 2.3 – Union de deux ensembles

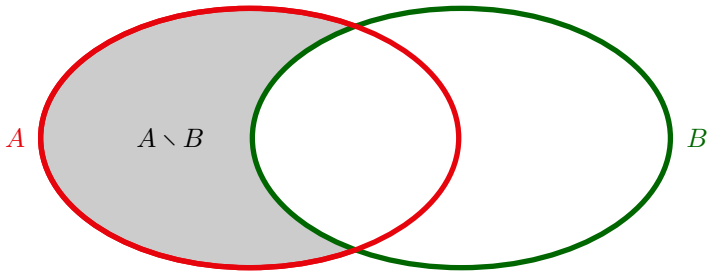


FIGURE 2.4 – Différence ensembliste

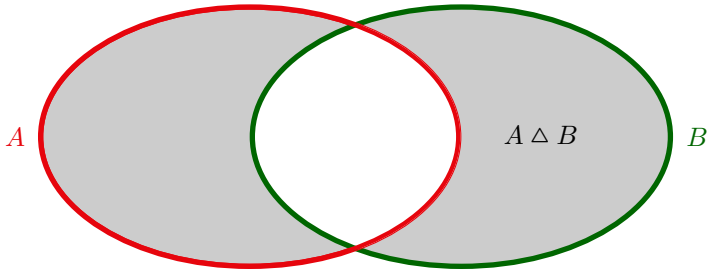


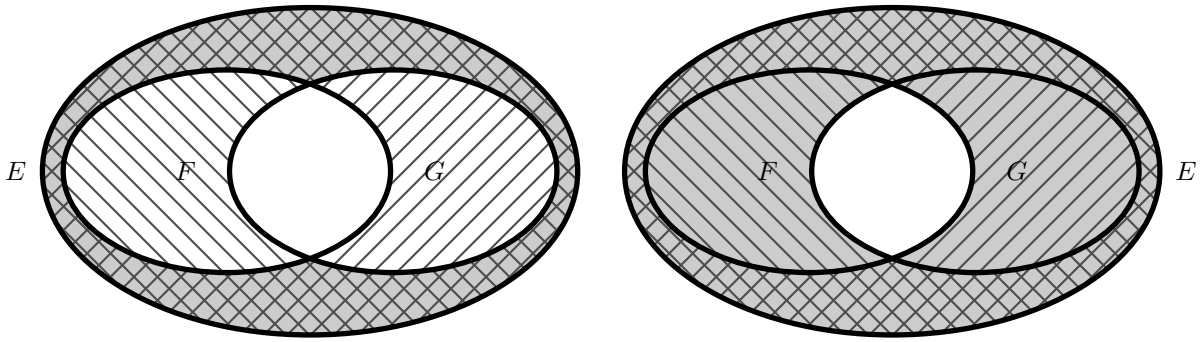
FIGURE 2.5 – Différence symétrique

La complémentation correspond bien entendu à la négation ensembliste, et est donc régie par des lois similaires à celles de la négation. En particulier, les lois de de Morgan ont leur analogue ensembliste, portant d'ailleurs le même nom.

Proposition 2.1.30 (Lois de De Morgan, figure 2.6)

Soit A et B deux sous-ensembles de E. Tous les complémentaires sont pris dans E :

1. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
2. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$



$(F \cup G)^c = F^c \cap G^c$ $\qquad$ $(F \cap G)^c = F^c \cup G^c$

Figure 2.6 – Lois de De Morgan

Proposition 2.1.31 (Décroissance du complémentaire)

L'application $A \mapsto A^c$ définie sur $\mathcal{P}(E)$ ordonné par inclusion est décroissante (la complémentation est prise sur E) :

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \quad A \subset B \Longrightarrow B^c \subset A^c.$$

◁ **Éléments de preuve.**

C'est la contraposition ! ▷

Le complémentaire est caractérisé par la propriété suivante :

Proposition 2.1.32 (caractérisation du complémentaire)

$\complement_E A$ est l'unique sous-ensemble B de E tel que $E = A \uplus B$.

On en déduit facilement :

Corollaire 2.1.33

1. $\complement_E E = \varnothing$
2. $\complement_E \varnothing = E$
3. $\complement_E \complement_E A = A$ *(la complémentation est involutive)*

Il faut bien garder en tête la correspondance entre opérations ensemblistes et connecteurs logiques :

$\cup \equiv \vee$	$x \in A \cup B \iff (x \in A) \vee (x \in B)$
$\cap \equiv \wedge$	$x \in A \cap B \iff (x \in A) \wedge (x \in B)$
$\complement \equiv \neg$	si $x \in A$, $(x \in \complement_A B \iff \neg(x \in B))$
$\subset \equiv \implies$	$A \subset B \iff (\forall x,\ x \in A \implies x \in B)$,
$\triangle \equiv$ ou exclusif	$x \in A \triangle B \iff x \in A$ ou (exclusif) $x \in B$
$= \equiv \iff$	$A = B \iff (\forall x,\ x \in A \iff x \in B)$.

I.6 Union et intersection d'une famille de sous-ensembles

Nous généralisons certaines constructions vues dans le paragraphe précédent au cas d'un plus grand nombre, fini ou infini d'ensembles.

Définition 2.1.34 (unions et intersections sur une famille)

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille (finie ou infinie) d'ensembles. On définit alors l'union et l'intersection de cette famille par :

- $\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I,\ x \in A_i\}$
- $\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I,\ x \in A_i\}$

L'existence de tels ensembles est un axiome de la théorie des ensembles.

Proposition 2.1.35

Si $I = [\![1, n]\!]$ (et plus généralement si I est fini, après numérotation de ses éléments), $\bigcup_{i\in I} A_i$ correspond à l'itération de l'union de 2 ensembles.

◁ **Éléments de preuve.**
C'est une récurrence assez immédiate. ▷

Notation 2.1.36 (Union disjointe)

Si les A_i sont deux à deux disjoints, on peut noter l'union $\bigsqcup_{i\in I} A_i$ ou $\biguplus_{i\in I} A_i$.

Proposition 2.1.37 (propriétés liées aux unions et intersections quelconques)

Un certain nombre de propriétés vues dans le paragraphe précédent se généralisent aux unions et intersections quelconques. Étant donné $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles, et B un ensemble, tous inclus dans un ensemble E :

1. $B \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I}(B \cap A_i)$ *(distributivité)*
2. $B \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I}(B \cup A_i)$ *(l'autre distributivité)*
3. $\complement_E\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I}\left(\complement_E A_i\right)$ *(loi de De Morgan)*
4. $\complement_E\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I}\left(\complement_E A_i\right)$ *(loi de De Morgan)*

◁ **Éléments de preuve.**
Les deux premières égalités découlent de propriétés logiques similaires (ou par double-inclusion), les deux dernières de la négation des quantificateurs et des connecteurs logiques. ▷

I.7 Partitions

Définition 2.1.38 (Partition d'un ensemble)

Une partition de E est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$ dont les éléments sont des sous-ensembles non vides de E, deux à deux disjoints et d'union égale à E. Il s'agit donc d'un ensemble $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(E)$ tel que

(i) $\forall A \in \mathcal{F},\ A \neq \varnothing$

(ii) $\forall A, B \in \mathcal{F}$, si $A \neq B$, alors $A \cap B = \varnothing$

(iii) $\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A = E$.

Les sous-ensembles A dans $\mathcal{F}$ sont appelés *parts* de la partition. Si $\mathcal{F}$ est fini, son cardinal n est appelé longueur de la partition (il s'agit du nombre de parts).

Il est fréquent de désigner une partition sous forme d'une famille $(A_i)_{i \in I}$, où pour tout $i \in I$, $A_i \subset E$. Les points (i), (ii) et (iii) de la définition se réécrivent alors :

(i) $\forall i \in I,\ A_i \neq \varnothing$

(ii) $\forall (i,j) \in I^2,\ \ i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$

(iii) $\bigcup_{i \in I} A_i = E$.

Définition 2.1.39 (Variantes autour des partitions)

Dans les variantes suivantes, nous adoptons le point de vue des familles (sauf pour le premier point). Vous pouvez transcrire facilement avec les notations ensemblistes de la définition initiale.

- Une *partition ordonnée (finie)* de E est un n-uplet $(A_1, \ldots, A_n)$ tel que l'ensemble $\{A_1, \ldots, A_n\}$ obtenu en oubliant l'ordre des parts soit une partition de E.
- Un *recouvrement* est une famille $(A_i)_{i \in I}$ vérifiant uniquement le point (iii) de la définition ci-dessus.
- Un *recouvrement disjoint* (ou *partition à parts éventuellement vide*) est une famille $(A_i)_{i \in I}$ vérifiant les points (ii) et (iii) de la définition d'une partition, mais pas nécessairement le point (i).
- En combinant les notions ci-dessus, on pourra aussi définir des *recouvrements disjoints ordonné*, (ou *partitions ordonnées à parts éventuellement vides*).

I.8 Produit cartésien

La dernière construction que nous voyons est une construction « externe » dans le sens où, contrairement aux précédentes, tout ne se passe pas parmi les sous-ensembles d'un ensemble donné E.

Définition 2.1.40 (Produit cartésien, figure 2.7)

Soit E et F deux ensembles. Le produit cartésien de E et F, noté $E \times F$, est un ensemble formé d'éléments notés (a,b), avec $a \in E$ et $b \in F$, appelés couples, et vérifiant la propriété suivante :

$$(a,b) = (a',b') \Longleftrightarrow (a = a' \text{ et } b = b').$$

Ainsi, pour chaque élément a de E, on dispose d'une copie complète de B, identifiée au produit $\{a\} \times B$, c'est-à-dire à l'ensemble des couples (a,b), pour b parcourant B. On peut bien entendu aussi le voir en inversant le rôle de A et B. Il faut relier cette notion à celle de **rectangle plein**, qui n'est autre que le produit cartésien de deux intervalles de $\mathbb{R}$

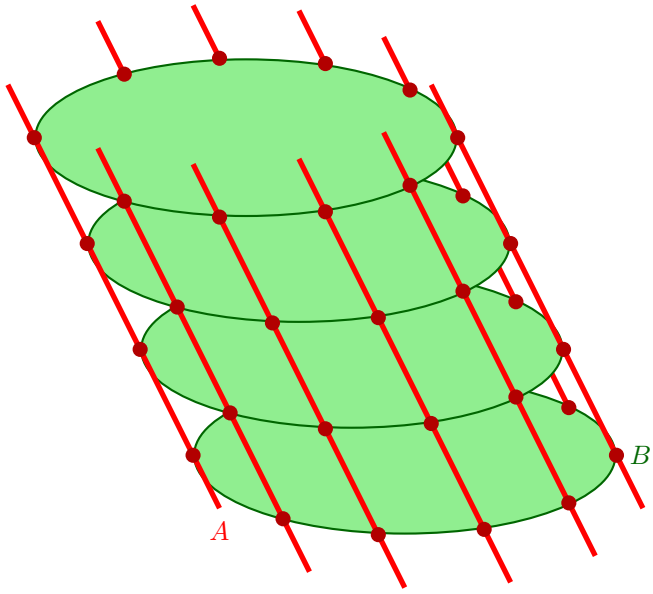


FIGURE 2.7 – Produit cartésien de deux ensembles

Remarque 2.1.41

Le couple (a,b) peut par exemple être défini par l'ensemble $\{\{a\},\{a,b\}\}$ (couple de Kuratowski, voir exercices). D'autres représentations ensemblistes sont possibles, mais moins commodes.

Proposition 2.1.42 (propriétés du produit cartésien)

Soit E, E' et F des ensembles. Alors :

1. $E \times F = \varnothing \iff (E = \varnothing) \vee (F = \varnothing)$;
2. $(E \cup E') \times F = (E \times F) \cup (E' \times F)$;
3. $(E \cap E') \times F = (E \times F) \cap (E' \times F)$;

Définition 2.1.43 (Triplets, n-uplets, produit cartésien à n termes)

- Un triplet est de même un objet construit à partir de 3 éléments, et vérifiant la propriété fondamentale
$$(a,b,c) = (a',b',c') \Longrightarrow (a = a') \wedge (b = b') \wedge (c = c').$$
- Pour $a \in A$, $b \in B$ et $c \in C$, on peut par exemple définir le triplet (a,b,c) comme étant le couple $((a,b),c)$, élément de $(A \times B) \times C$.
- Le produit cartésien à 3 termes $A \times B \times C$ est l'ensemble des triplets (a,b,c) d'éléments de A, B et C.
- La représentation ci-dessus des triplets identifie $(A \times B) \times C$ et $A \times B \times C$.
- On définit de même par propriété fondamentale (identification des coordonnées) ou itérativement la notion de n-uplet $(a_1,\dots,a_n)$ et de produit cartésien à n termes $A_1 \times \cdots \times A_n$, aussi noté $\prod_{i=1}^{n} A_i$.

Notation 2.1.44

On note $E^2 = E \times E$, et plus généralement, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note E^n le produit cartésien de n copies du même ensemble E.
Par convention, $E^1 = E$, et on pourrait même définir E^0, n'ayant qu'un élément $()$.

I.9 Fonction indicatrice (ou caractéristique)

Nous introduisons dans ce paragraphe un outil souvent assez efficace pour étudier les constructions internes à $\mathcal{P}(E)$, E étant un ensemble fixé.
En admettant momentanément la notion intuitive de fonction, on peut associer, à tout sous-ensemble de E, une fonction de E dans $\{0,1\}$.

Définition 2.1.45 (Fonction indicatrice, ou caractéristique, d'un ensemble)
Soit E un ensemble et A un sous-ensemble de E. La fonction indicatrice (ou caractéristique) de A, notée $\mathbb{1}_A$, est la fonction de E dans $\{0,1\}$ définie par :

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{1}_A : & E & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases} \end{array}$$

On trouve parfois la notation χ_A au lieu de $\mathbb{1}_A$.
Un certain nombre de propriétés ensemblistes élémentaires se traduisent sur les fonctions indicatrices. Les constructions élémentaires se transcrivent également très bien au niveau des fonctions indicatrices.

Proposition 2.1.46 (propriétés des fonctions indicatrices)
Soit E un ensemble, et A, B des sous-ensembles de E. On a alors :

1. $A = \{x \in E \mid \mathbb{1}_A(x) = 1\}$.
2. $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$
3. $\mathbb{1}_{\complement_E A} = 1 - \mathbb{1}_A$
4. *Si A et B sont disjoints,* $\mathbb{1}_{A\uplus B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$
5. *Dans le cas général,* $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$

Certaines propriétés se traduisent sur les fonctions indicatrices. Par exemple, A et B sont disjoints si et seulement si $\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B = 0$, ou bien $\{A_1, \ldots, A_n\}$ est une partition de E si et seulement si les A_i sont non vides et $\mathbb{1}_{A_1} + \cdots + \mathbb{1}_{A_n} = 1$.

Les fonctions indicatrices peuvent donner des démonstrations rapides et formelles de certaines propriétés ensemblistes.

Exemple 2.1.47
Redémontrer la distributivité de l'intersection sur l'union à l'aide des fonctions caractéristiques.

Toute la puissance des fonctions caractéristiques apparaît dans la preuve du résultat suivant, assez pénible si vous cherchez à la faire par des moyens élémentaires, très élégante et rapide si vous utilisez convenablement les fonctions indicatrices.

Théorème 2.1.48 (Associativité de la différence symétrique)
Soit A, B et C des sous-ensembles de E. On a alors

$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C).$$

◁ **Éléments de preuve.**
Il suffit de remarquer que $\mathbb{1}_{A\triangle B} \equiv \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$ [2]. ▷

II Paradoxes ensemblistes et axiomatisation

II.1 La crise des fondements

Note Historique 2.2.1

- En 1896, alors qu'il essaye de donner une construction de $\mathbb{N}$ et des ordinaux plus généraux (nombres transfinis), Georg Cantor se rend compte d'une contradiction dans sa théorie des ensembles (il définit un ensemble comme une collection quelconque d'objets). En effet, il prouve que pour tout ensemble E, $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) > \mathrm{Card}(E)$ (dans le sens qu'il donne à la notion de cardinal, défini à l'aide des ordinaux). Cette contradiction empêche de parler de l'ensemble des ensembles : en effet, par définition, l'ensemble de ses parties vérifierait $\mathcal{P}(E) \subset E$, ce qui est incompatible avec l'inégalité ci-dessus.
  Il n'en parle à personne car sa théorie est menacée, à part à David Hilbert, qui fait autorité à l'époque, et à qui il envoie une lettre.
- En 1897, Cesare Burali-Forti parvient à la même conclusion et publie son résultat, sans vraiment être persuadé que cela remet tout en cause.
- En 1901, le logicien et philosophe anglais Bertrand Russell exprime le premier paradoxe simple prouvant que toute collection ne peut pas être un ensemble. En effet, en définissant

  $$E = \{\text{ensembles F qui ne se contiennent pas eux-mêmes}\},$$

  si E était un ensemble :
  * si $E \notin E$, alors par définition de E, E est élément de E, d'où une contradiction ;
  * si $E \in E$, alors, par définition de E, E n'est pas élément de E, d'où une contradiction.

  Cet argument très simple montre que E ne peut pas être un ensemble.
  Ce paradoxe est connu sous le nom de « paradoxe de Russell » ou parfois « paradoxe du barbier ». En effet, la situation s'apparente à celle d'un barbier qui rase tout homme qui ne se rase pas lui-même. Ce barbier peut-il être un homme ?
- Ce paradoxe a en fait été envoyé par Russell au logicien et philosophe allemand Gottlob Frege, suite à la parution du premier volume de son ouvrage *Les fondements de l'arithmétique*, pour lui prouver que son ouvrage reposait sur une contradiction. Frege publie tout de même le second volume, en lui adjoignant un appendice dans lequel il fait l'aveu et le constat sans doute les plus désarmants de toute l'histoire des mathématiques :

  > « Pour un écrivain scientifique, il est peu d'infortunes pires que de voir l'une des fondations de son travail s'effondrer alors que celui-ci s'achève. C'est dans cette situation inconfortable que m'a mis une lettre de M. Bertrand Russell, alors que le présent volume allait paraître »

  Par la suite, Frege cessa presque entièrement ses travaux mathématiques.
- D'autres paradoxes, recherchant des formes amusantes, virent alors le jour, comme le paradoxe de Jules Richard (1905), dont un enoncé simplifié est le paradoxe de Berry (formulé par Russell en 1906, il l'attribue à un bibliothécaire londonien du nom de Berry) :
  Soit E l'« ensemble » des entiers qui ne peuvent pas se définir en moins de 16 mots. Cet ensemble est non vide car son complémentaire est fini (car il y a un nombre fini de mots dans la langue française)
  Par les propriétés des sous-ensembles de $\mathbb{N}$, cet « ensemble » admet un plus petit élément, qui peut être défini par : « le plus petit entier qui ne peut pas se définir en moins de seize mots », définition qui n'utilise que 15 mots !
- Ce dernier paradoxe est à la base de la démonstration de la non-calculabilité de la complexité de Kolmogorov, correspondant au nombre de caractère minimal d'une fonction informatique permettant de définir un objet donné. En effet, si cette complexité est calculable, il existe une fonction K retournant la complexité de Kolmogorov de tout objet passé en paramètre, notamment des entiers. En notant k le nombre de caractère d'une telle fonction, il n'est pas dur d'écrire une fonction de moins de 1000 caractères, recherchant le plus petit entier n de complexité de Kolmogorov inférieure à $k+1000$. L'existence de cette fonction montre que n a une complexité de Kolmogorov inférieure à 1000, ce qui est contradictoire.

II.2 Tentatives d'axiomatisation

Note Historique 2.2.2

- De nombreuses tentatives d'axiomatisation de la théorie des ensembles à la suite de cette crise des fondements, toutes n'ont pas été fructueuses
- Le choix qui s'est imposé est finalement l'axomatique de Zermelo-Fraenkel à laquelle on ajoute ou non l'axiome du choix.

La théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel définit les ensembles comme étant des objets satisfaisant à un certain nombre d'axiomes. Dans cette théorie, les éléments eux-même sont tous des ensembles. Les nombres (les entiers relatifs dans un premier temps) sont alors définis comme étant des ensembles en particulier, par exemple à la façon des ordinaux de Cantor.

Axiome 2.2.3 (les axiomes de la théorie de Zermelo-Fraenkel, HP)

Voici les noms des différents axiomes, et leur interprétation intuitive :

- *Axiome d'extentionnalité : c'est lui qui dit que deux ensembles sont égaux si et seulement si ils ont mêmes éléments. Cet axiome est notamment à la base du principe de double-inclusion.*
- *Axiome de la paire : il affirme l'existence des paires $\{a, b\}$, lorsque a et b sont deux ensembles. En particulier, l'axiome de la paire affirme aussi l'existence des singletons $\{a\}$, pour un ensemble a (prendre $a = b$!)*
- *Axiome de la réunion : il donne la possibilité de construire des unions des éléments d'un ensemble (ces éléments étant eux-même des ensembles)*
- *Axiome des parties : il affirme que si a est un ensemble, alors $\mathcal{P}(a)$ aussi.*
- *Schéma d'axiome (*i.e. *série d'axiomes) de compréhension : il permet en particulier de définir un ensemble par compréhension (comme sous-ensemble d'un ensemble donné, constitué des éléments vérifiant une certaine propriété)*
- *Axiome de l'infini : il donne l'existence de l'infini, et notamment des ensembles infinis.*
- *Axiome de fondation : il dit en particulier qu'un ensemble ne peut pas s'appartenir (on ne peut pas avoir $x \in x$). Plus généralement, il n'y a pas de cycle pour la relation d'appartenance.*

À ces différents axiomes, on ajoute ou non (suivant la théorie) l'axiome du choix. Cet axiome du choix est indécidable à partir des axiomes de Zermelo-Fraenkel, et il est actuellement couramment admis qu'il doit être considéré comme vrai.

Axiome 2.2.4 (Axiome du choix, HP)

Soit I un ensemble, et pour tout $i \in I$, E_i un ensemble non vide. Alors il existe une fonction $f : I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} E_i$ telle que pour tout $i \in I$, $f(i) \in E_i$, appelée fonction de choix.

Autrement dit, étant donné une famille d'ensembles, on peut choisir un élément dans chaque ensemble, d'où le nom de cet axiome. Évidemment, si I est fini, ce n'est pas très étonnant, et cela résulte de l'axiome de récurrence (car par définition-même de l'interprétation du symbole $\exists$, on peut toujours choisir **un** élément d'un ensemble non vide). N'invoquez donc l'axiome du choix que pour un choix infini, c'est dans cette situation qu'il est pertinent.

Remarque 2.2.5

1. L'axiome de la paire, couplée à l'axiome de l'union, permet de considérer $A \cup B$ pour tous ensembles A et B
2. En itérant cet argument, on peut considérer l'union de n ensembles.

3. L'intersection d'une famille quelconque (non réduite à l'ensemble vide) d'ensembles s'obtient par compréhension (axiome de compréhension, en se plaçant globalement dans un des ensembles donnés).
4. L'union d'une famille quelconque est plus délicate ; il faut déjà préciser ce qu'on entend par famille $(a_i)_{i\in I}$: il s'agit d'une application d'un *ensemble* I dans un autre *ensemble* E qui à $i \in I$ associe a_i. Ainsi, les a_i doivent eux-même être des éléments d'un ensemble. Dans ce cas, l'image $\{a_i, i \in I\}$ de cette famille est un ensemble (on peut la définir par compréhension), donc on peut considérer l'union de ses éléments (axiome de l'union).
5. L'existence (et l'unicité) de l'ensemble vide provient de l'axiome de compréhension, à partir d'un ensemble A quelconque (on sait qu'il existe au moins un ensemble, d'après l'axiome de l'infini ; de toute façon, si ce n'était pas le cas, la théorie serait bien pauvre). L'ensemble vide peut alors se définir par compréhension de la façon suivante :

$$\varnothing = \{x \in A \mid x \neq x\}.$$

Remarque 2.2.6

Interprétez la citation de Bertrand Russell en début de chapitre.

III Applications

Une civilisation constituée de groupes de personnes n'interagissant pas entre eux serait assez pauvre. Ce sont les relations entre groupes d'individus qui permettent de comparer, d'apprendre, de progresser, de transmettre, que ce soient des relations internes à un groupe donné, ou des relations d'un groupe à un autre. Une civilisation sans relation est vouée à la stérilité et à l'immobilisme, et donc à l'extinction.

Il en est de même pour les ensembles mathématiques. La théorie axiomatique des ensembles est certes très belle en soi, mais si on n'y rajoute pas une couche, elle est d'un intérêt assez limité pour le mathématicien recherchant le débouché concret (on a tendance à oublier que ce débouché concret a longtemps été la motivation-même des scientifiques, y compris mathématiciens). Comme dans le cas d'une civilisation, il faut faire interagir les ensembles, il faut créer des relations permettant de comparer les éléments d'un ensemble d'une façon ou d'une autre. Ce n'est qu'ainsi qu'on peut donner vie aux ensembles.

Nous étudions dans ce chapitre un type particulier de relations entre deux ensembles. Il s'agit de la notion d'application, ou de fonction, qu'on peut considérer comme synonyme ou non, suivant qu'on est puriste ou non (dans le sens inverse).

III.1 Qu'est-ce qu'une application ?

Définition 2.3.1 (Application, définition intuitive)

Soit E et F deux ensembles. Une application f est un objet qui à tout élément x de E associe un élément $f(x)$ de F.

C'est bien sûr cette interprétation intuitive qu'il faut garder à l'esprit pour bien comprendre ce qu'est une application. Mais cela ne décrit pas bien la nature précise d'une application. Pour savoir à quoi précisément correspond une application, il faut une définition plus rigoureuse, basée sur des objets déjà définis. Il faut donc traduire de façon ensembliste cette action d'associer un élément à un autre.

Définition 2.3.2 (Application, définition formelle (HP) ; graphe ; image)

Une application f est un triplet d'ensembles (E, F, G) tel que :

- G est un sous-ensemble de $E \times F$, appelé graphe de f
- pour tout x dans E, il existe un et un seul élément y de F tel que $(x, y) \in G$. Cet élément y est noté $f(x)$.

L'ensemble E est appelé ensemble de départ, ou ensemble source, de l'application f. L'ensemble F est appelé ensemble d'arrivée de l'application f.

Définir une application nécessite donc la donnée de E, de F et du graphe G, ce qui revient à définir, d'une façon ou d'une autre, un élément $f(x)$ pour tout $x \in E$. L'ensemble de ces données est souvent synthétisé par la notation suivante :

$$\begin{array}{rccc} f: & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & f(x), \end{array}$$

en remplaçant $f(x)$ par son expression, par exemple $\cos(x)$.

Avertissement 2.3.3

Une expression $f(x)$ ne désigne pas une application, mais seulement la valeur d'une application en un point. Parler de l'application, ou la fonction $x\cos(x)$ n'a pas de sens. Tout au plus est-il acceptable de parler de l'application (ou la fonction) $x \mapsto x\cos(x)$, même si les ensembles E et F sont omis dans cette notation.

Note Historique 2.3.4

- La notion est ancienne, mais reste longtemps vague et mal définie, sans réelle notation.
- En 1694, Leibniz est le premier à parler de « fonction d'un point M », puis Newton parle de « fluente du temps t ».
- Leibniz est le premier à proposer une notation, notamment dans le cas où on utilise plusieurs fonctions : il propose $\overline{x}\,|\,\underline{1}$ et $\overline{x}\,|\,\underline{2}$ pour ce qu'on noterait actuellement $f_1(x)$ et $f_2(x)$.
- Euler introduit en 1734 la notation fx, encore en vigueur actuellement (au parenthésage près).

Remarque 2.3.5 (Application ou fonction ?)

- Actuellement, une fonction f de E dans F désigne une application de D dans F, où D est un sous-ensemble de E, appelé ensemble de définition de f. Ainsi, une fonction est une « application par nécessairement définie sur E tout entier ».
- L'énoncé pris dans l'autre sens est plus rigoureux : « Une application est une fonction définie sur tout son domaine ».
- Historiquement, une fonction désignait plutôt une application à valeurs numériques.
- Les deux mots sont souvent utilisés indifféremment et on ne va pas en faire toute une histoire ! En effet, cet abus de langage n'est pas très gênant :
  - Comme vous l'avez compris, une application est une fonction, donc utiliser la terminologie « fonction » n'est pas incorrect.
  - Inversement, une fonction de E dans F définit une unique application $\tilde{f} : E' \to F$ où E' est l'ensemble de définition de f. L'abus de langage consistant à parler de l'application f se comprend alors très bien en considérant la restriction de f à son ensemble de définition.
- Le programme officiel de MP2I/MPSI stipule explicitement qu'on ne fera pas la distinction entre fonction et application.

Lorsque f est une application d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, le graphe de f est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$. On visualise une fonction f en représentant son graphe dans le plan muni d'un repère (figure 2.8)

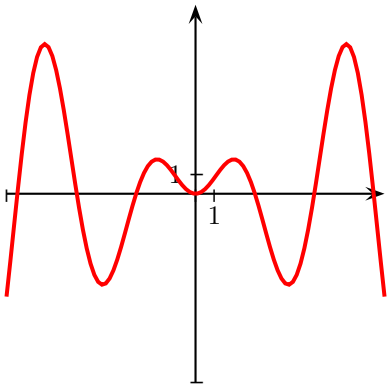


FIGURE 2.8 – Graphe de $x \mapsto x \sin x$

Lorsque E et F sont des ensembles finis, on peut représenter l'application f sous forme d'un *diagramme sagittal* : on représente les éléments de E d'un côté, ceux de F d'un autre côté, l'application f est alors représentée par une série de flèches reliant les éléments x de E à leur image $f(x)$ dans F.
Par exemple, l'application de $[\![1,6]\!]$ dans $[\![1,4]\!]$ définie par $f(1) = 3$, $f(2) = 1$, $f(3) = 1$, $f(4) = 4$, $f(5) = 3$ et $f(6) = 2$ sera représentée par le diagramme sagittal de la figure 2.9

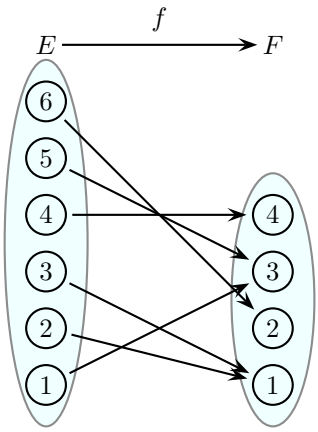


FIGURE 2.9 – Diagramme sagittal

Exemples 2.3.6

1. Application identique (identité)
2. Soit $E \subset F$. L'injection canonique $i : E \to F$.
3. Soit $E \subset F$. La fonction indicatrice de E dans F, $\mathbb{1}_E : F \to \{0,1\}$ (la terminologie « fonction » renvoie ici à l'acceptation historique)
4. La projection canonique $p_E : E \times F \to E$.

Notation 2.3.7

On note F^E l'ensemble des applications de E dans F.

Nous avons déjà recontré un type d'applications pour lesquelles la dépendance par rapport à la variable est notée indiciellement :

Définition 2.3.8 (Familles et suites)

- Une *famille* $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments d'un ensemble E, indexée par un ensemble I, est une application $x : I \longrightarrow E$. Dans cette situation, on utilise plutôt une notation indicielle x_i à la place de $x(i)$. L'ensemble I est appelé l'ensemble des indices de la famille $(x_i)_{i\in I}$
- Une suite d'éléments d'un ensemble E est une famille indexée par $\mathbb{N}$, ou éventuellement par un ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant n_0\}$. Nous étudierons notamment les suites réelles ($E = \mathbb{R}$) et les suites complexes ($E = \mathbb{C}$)

Remarque 2.3.9

Une suite est donc un cas particulier de famille. Dans ce cas particulier, on dispose d'une notion d'ordre des éléments, induit par l'ordre usuel des entiers relatifs : on range alors naturellement les éléments de la suite dans l'ordre de leur indice. En général, on ne peut faire cela pour une famille quelconque. C'est ce qui fait qu'on obtient souvent pour les suites des résultats et des théories qu'on ne peut pas ou pas facilement généraliser aux familles quelconques. On trouvera plus tard cette situation dans le problème de la sommation (séries convergentes *versus* familles sommables), où l'ordre de sommation a son importance.

Voici quelques moyens de définir une application ou une fonction (la liste n'est pas exhaustive) :

- **Définition par une formule explicite :**
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}$$
- **Définition par disjonction de cas (application définie par morceaux) :**
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$
Attention dans ce cas :
  * si les différents cas ne couvrent pas la totalité du domaine, cela définit une fonction et non une application ;
  * si les différents cas sont redondants (par exemple définition pour $x \leqslant 0$ et $x \geqslant 0$), il faut vérifier la cohérence aux points redondants (dans l'exemple, vérifier que la valeur définie pour $f(0)$ est la même dans le cas $x \leqslant 0$ et dans le cas $x \geqslant 0$).
- **Définition par récurrence :**
$$u_0 = 2 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 3u_n^2 - 2.$$
Évidemment, ce n'est possible que pour définir une suite ! On peut généraliser cela à un domaine E défini par induction structurelle, en calquant la définition de la fonction sur la description des constructions définissant E et les éléments initiaux de E.
- **Définition implicite :**
La fonction f est définie comme étant, pour une valeur de x donnée, l'unique solution d'une certaine équation. Par exemple :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \int_0^{f(x)} \mathrm{e}^{xt^2}\,\mathrm{d}t = x$$
Cela définit le plus souvent une fonction et non une application, l'équation pouvant ne pas avoir de solution pour certaines valeurs de x
- **Définition par une équation fonctionnelle ou différentielle :**
Exemple : il existe une unique application dérivable f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = f'(0) = 1$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = f(x)f(y)$ (laquelle ?)
Exemple : il existe une unique application f dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f(0) = 1$ et $f' = f$ (laquelle ?)

Définition 2.3.10 (composition d'applications)

Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$. Alors, l'application composée de f et de g est l'application, notée $g \circ f$, définie par :

$$\begin{array}{rccc} g \circ f : & E & \longrightarrow & G \\ & x & \longmapsto & g(f(x)). \end{array}$$

Remarque 2.3.11

1. Est-ce dans le contexte décrit ci-dessus, la notation $g(f)$ est correcte ? Sur quel ensemble g devrait-elle être définie pour donner un sens à cette notation ?
2. On peut composer des fonctions également. Le domaine de définition est alors constitué des éléments x de D_f tels que $f(x) \in D_g$.

Définition 2.3.12 (Restriction, prolongement, corestriction)

Soit E et F deux ensembles, et soit $E' \subset E$ et $F' \subset F$.

1. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. La restriction de f à E', notée $f_{|E'}$, est l'unique application de E' dans F telle que pour tout $x \in E'$, $f_{|E'}(x) = f(x)$.
   On peut aussi définir la restriction d'une fonction : $f_{|E'}$ ne sera alors définie qu'aux points de E' en lesquels f l'est.
2. Soit $g : E' \to F$. Un prolongement de g à E est une application $f : E \to F$ telle que $g = f_{|E'}$. Un tel prolongement n'est bien entendu pas unique en général.
3. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. La corestriction de f à F' est la fonction $f^{|F'}$ définie en tout x de E tel que $f(x) \in F'$ par $f^{|F'}(x) = f(x)$ et non définie si $f(x) \notin F'$.
   On peut définir de la même manière la corestriction d'une fonction.

Avertissement 2.3.13

En général, la corestriction d'une application n'est pas une application, mais seulement une fonction au sens évoqué ci-dessus. On donne ci-après une condition pour que ce soit une application.

Exemples 2.3.14

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Décrire sa restriction à $\mathbb{R}^+$, sa corestriction à $[1, +\infty[$
2. Comparer la restriction à E' de la corestriction à F' de $f : E \to F$ à la corestriction à F' de la restriction à E' de f.

III.2 Image directe, image réciproque

Soit E et F deux ensembles, et $f : E \longrightarrow F$ une application de E vers F.

Définition 2.3.15 (Image d'une application)

L'image de f est l'ensemble $\mathrm{Im}(f) = \{y \in F \mid \exists x \in E,\ f(x) = y\}$. C'est l'ensemble des points de F qui sont images d'un certain point x.

La notion d'image permet notamment de donner une condition d'existence d'une corestriction :

Proposition 2.3.16 (Corestriction d'une application)

Soit $f : E \to F$ une application et $F' \subset F$. La corestriction de f est une application si et seulement si $\mathrm{Im}(f) \subset F'$.

Définition 2.3.17 (Image directe)

1. Soit $E' \subset E$ un sous-ensemble de E. L'image directe de E' par f est l'ensemble :
$$f(E') = \{y \in F \mid \exists x \in E',\ f(x) = y.\}.$$
C'est l'ensemble des valeurs qui sont images d'un x de E'.
2. Cette construction définie une application « image directe » :
$$\begin{array}{rccc} \widetilde{f}: & \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(F) \\ & E' & \longmapsto & f(E') \end{array}$$

Attention, même si on utilise la notation $f(E')$, il serait faux de confondre l'application $\tilde{f}$ et l'application f. Leurs ensembles de définition ne sont pas les mêmes.

Définition 2.3.18 (antécédent d'un élément)

- Soit $y \in F$. Un antécédent par f de y est un élément x de E tel que $f(x) = y$.
- On note $\widehat{f^{-1}}(\{y\})$ (ou lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, $f^{-1}(\{y\})$) l'ensemble des antécédents de y par f. C'est un sous-ensemble de E.

Remarque 2.3.19

Un élément de F peut ne pas avoir d'antécédent par f, ou peut en avoir un seul, ou plusieurs.

Proposition 2.3.20 (Recouvrement disjoint associé à une application)

Soit f une application de E dans F. L'ensemble $\{f^{-1}(\{y\}), y \in F\}$ est un recouvrement disjoint de E.

◁ **Éléments de preuve.**

Le fait que les parts sont disjointes provient de l'unicité de l'image, le fait que l'union est E provient de l'existence de l'image. Que dire si f est une fonction ? ▷

L'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ des antécédents de y correspond à un cas particulier d'une notion plus générale :

Définition 2.3.21 (Image réciproque)

1. Soit $F' \subset F$ un sous-ensemble de F. L'image réciproque de F' est l'ensemble : $\widehat{f^{-1}}(F') = \{x \in E \mid f(x) \in F'\}$ C'est l'ensemble des éléments dont l'image est dans F', ou, autrement dit, l'ensemble des antécédents d'éléments de F'.
2. Cette construction définit une application :
$$\begin{array}{rccc} \widehat{f^{-1}}: & \mathcal{P}(F) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ & F' & \longmapsto & \widehat{f^{-1}}(F') \end{array}$$

Ainsi, par définition, $\boxed{x \in \widehat{f^{-1}}(F') \iff f(x) \in F'}$. En d'autres termes $\widehat{f^{-1}}(F')$ est l'ensemble des éléments de E qui sont antécédents d'au moins (et dans ce cas, d'exactement – pourquoi ?) un élément de F'.

Remarque 2.3.22

Les tildes et chapeaux sur $\widetilde{f}$ et $\widehat{f^{-1}}$ sont présents uniquement pour distinguer ces applications (définies sur l'ensemble des parties de E et F respectivement) des applications f et f^{-1}. Ces notations sont surtout utilisées pour désigner formellement ces applications, mais dès qu'elles sont évaluées sur des sous-ensembles (de E ou F suivant le cas), on écrira le plus souvent simplement $f(E')$ et $f^{-1}(F')$.

Proposition 2.3.23 (Croissance des images directes et réciproques)

Soit f une application de E dans F. Alors $\widetilde{f}$ et $\widehat{f^{-1}}$ sont croissantes pour l'inclusion. Autrement dit :

- *Pour tous E', E'' dans $\mathcal{P}(E)$ tels que $E' \subset E''$, on a $f(E') \subset f(E'')$;*
- *Pour tous F', F'' dans $\mathcal{P}(F)$ tels que $F' \subset F''$, on a $f^{-1}(F') \subset f^{-1}(F'')$;*

◁ **Éléments de preuve.**

Intuitivement évident. Revenir aux éléments pour le justifier rigoureusement. ▷

Proposition 2.3.24 (Images directes et réciproques d'unions ou intersections)

Soit E et F deux ensembles, $f : E \longrightarrow F$ une application, et $(E_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles de E, $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles de F. Alors :

1. $f\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(E_i)$
2. $f\left(\bigcap_{i\in I} E_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(E_i)$ *(attention ! ce n'est qu'une inclusion !)*
3. $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} F_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(F_i)$
4. $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} F_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(F_i)$.

Exemple 2.3.25

On peut avoir une inclusion stricte $f(E' \cap E'') \subset f(E') \cap f(E'')$. Pour un exemple, voir figure 2.10

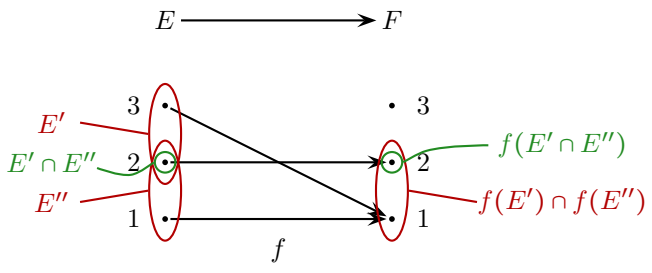


FIGURE 2.10 – Exemple dans lequel $f(E' \cap E'') \neq f(E') \cap f(E'')$

En retenir que tout se passe bien avec les images réciproques, mais qu'il faut prendre un peu plus de précautions avec les images directes.

Remarque 2.3.26 (Transition vers la section suivante)
À quelle condition suffisante l'image d'une intersection est-elle l'intersection des images ? Est-ce une condition nécessaire ?

III.3 Injectivité, surjectivité, bijectivité

Définition 2.3.27 (Injectivité, surjectivité, bijectivité)
Soit $f : E \to F$ une application. On dit que :

1. f est injective ssi tout élément de F admet au plus un antécédent par f
2. f est surjective ssi tout élément de F admet au moins un antécédent par f
3. f est bijective ssi f est injective et surjective.

Remarque 2.3.28
Ainsi, f est bijective si et seulement si tout élément de F admet exactement un antécédent. Pour cette raison, une bijection est parfois aussi appelée correspondance 1 à 1 (issu de la terminologie anglaise « one-to-one correspondance »).

Terminologie 2.3.29 (permutation, groupe symétrique)
Une bijection de E dans lui-même est appelée *permutation* de E. On note $S(E)$ ou $\mathfrak{S}(E)$ l'ensemble des permutations de E. Si $E = \{1, \cdots, n\}$, on note S_n (ou $\mathfrak{S}_n$) au lieu de $S(E)$ (ou $\mathfrak{S}(E)$). L'ensemble S_n est appelé *n-ième groupe symétrique*.

La notation $\mathfrak{S}$ est l'écriture gothique de la lettre S.

Exemples 2.3.30

1. Soit $E \subset F$. L'injection $i : E \to F$ est ..... .
2. Soit E et F deux ensembles, $F \neq \varnothing$. La projection $p_E : E \times F \to E$ est ..... .
3. La fonction identité $E \to E$ est ..... .
4. La fonction $x \mapsto x^2$ est :
   - ..... si elle est vue comme fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$;
   - ..... si elle est vue comme fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$
   - ..... si elle est vue comme fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$
   - ..... si elle est vue comme fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

   Il est donc important de porter une attention particulière aux domaines de départ et d'arrivée dans l'étude des propriétés d'injectivité et de surjectivité. D'autre part, constatez sur cet exemple qu'une fonction peut n'être ni injective ni surjective.

Voici plusieurs reformulations assez évidentes (mais il est utile de les avoir en tête) des notions d'injectivité et de surjectivité :

Proposition 2.3.31 (CNS d'injectivité)
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) *f est injective ;*

(ii) $\forall (x, y) \in E^2,\ x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y)$,

(iii) $\forall (x, y) \in E^2,\ f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$.

◁ **Éléments de preuve.**
(ii) équivaut à (iii) par contraposition, (i) implique (iii) en considérant l'image réciproque de $f(x)$, et (iii) implique (i) en contraposant : si (i) est faux, on trouve facilement x et y contredisant (iii). ▷

Proposition 2.3.32 (CNS de surjectivité)
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Les propositions suivantes sont équivalentes :
(i) f *est surjective ;*
(ii) $\forall y \in F,\ \mathrm{Card}(f^{-1}(\{y\})) \geqslant 1$;
(iii) $\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ f(x) = y$;
(iv) $\mathrm{Im}(f) = F$.

◁ **Éléments de preuve.**
C'est évident ▷

Corollaire 2.3.33 (Partition associée à une surjection)
Lorsque l'application $f : E \to F$ est surjective, le recouvrement disjoint de E associé à f est une partition.

◁ **Éléments de preuve.**
En effet, les parts sont alors non vides. ▷

Dans le cas d'ensembles finis, on peut illustrer ces notions sur des diagrammes sagittaux (figure 2.11).

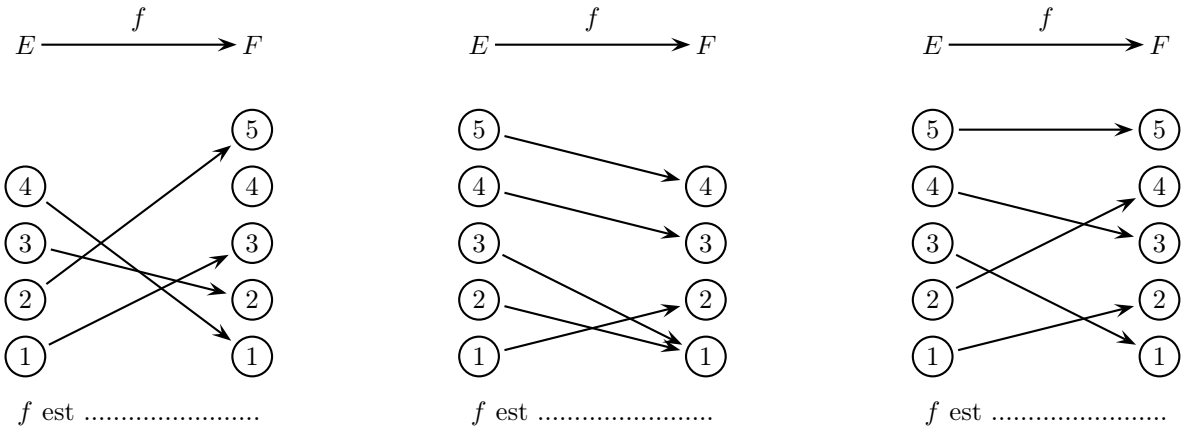


FIGURE 2.11 – Diagramme sagittal d'une fonction f injective, surjective ou bijective

Remarque 2.3.34
Intuitivement, si $f : E \to F$ est une injection, il y a plus d'éléments dans F que dans E. C'est l'inverse si f est une surjection, et c'est E et F ont même cardinal si f est une bijection. C'est vrai si E et F sont finis. Attention, aux cas où E et F sont infinis : la situation peut parfois être contraire à l'intuition.

Exemples 2.3.35
1. Principe de l'hôtel de Hilbert : soit $x \notin \mathbb{N}$. Alors $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N} \cup \{x\}$ peuvent être mis en bijection (on dit qu'ils ont même cardinal).

2. La numérotation en diagonales de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^2$.
3. $\tan :]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$ est une bijection (rappel : pour tout x pour lequel $\cos(x)\neq 0$, $\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$). Pourtant, il y a « plus » d'éléments dans $\mathbb{R}$ que dans $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.
4. Soit $f : [0,1[^2 \longrightarrow [0,1[$ définie de la façon suivante : étant donné x et y dans $[0,1[$, on note x_i le i-ième chiffre de x après la virgule dans son écriture décimale, et de même pour y_i. On rappelle que si x est décimal, x admet deux écritures décimales, l'une qui termine par une infinité de 0, l'autre qui termine par une infinité de 9 (car $0.9999999... = 1$). On choisit dans ce cas, afin que les x_i et les y_i soient définis de façon unique, la représentation terminant par des 0. On définit alors f sur le couple (x,y) par :

   $$f(x,y) = 0.x_1y_1x_2y_2x_3y_3....$$

   Il s'agit donc du réel de $[0,1[$ obtenu en alternant les chiffres de x et ceux de y.

   La fonction f est injective. Est-elle surjective ?
5. On peut de même contruire une fonction $g : [0,1[\longrightarrow [0,1]^2 \setminus \{(1,1)\}$ par :

   $$g(x) = (0.x_1x_3x_4....; 0.x_2x_4x_6....),$$

   les x_i représentant encore les chiffres de x dans l'écriture décimale, avec les mêmes conventions pour les réels décimaux.

   La fonction g est surjective. Est-elle injective ?

Les exemples précédents permettent d'établir (avec la notion de cardinal définie plus loin) que $\mathbb{N}$ est de même cardinal que $\mathbb{N}^2$, que $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ est de même cardinal de $\mathbb{R}$ (en fait, tout intervalle non vide et non restreint à un singleton est de même cardinal que $\mathbb{R}$), et, plus surprenant encore, que $[0,1[^2$ est de même cardinal que $[0,1[$ (de quoi il ressort que $\mathbb{R}^2$ est de même cardinal que $\mathbb{R}$!)

Proposition 2.3.36 (Composée d'injections, surjections, bijections)

Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. Alors :

1. *si f et g sont injective, alors $g\circ f$ aussi ;*
2. *si f et g sont surjectives, alors $g\circ f$ aussi ;*
3. *si f et g sont bijectives, alors $g\circ f$ aussi ;*

◁ **Éléments de preuve.**

Pour le point (i), considérer x et y tels que $g\circ f(x) = g\circ f(y)$, et obtenir d'abord $f(x) = f(y)$ puis $x = y$. Le point (ii) est évident, le point (iii) est la combinaison de (i) et (ii). ▷

Cette proposition admet une réciproque partielle :

Proposition 2.3.37 (« Dé-composée » d'injections, surjections, bijections)

Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. Alors :

1. *si $g\circ f$ est injective, alors f est .....*
2. *si $g\circ f$ est surjective, alors g est .....*

◁ **Éléments de preuve.**

1. Considérer x et y tels que $f(x) = f(y)$, et se ramener à l'utilisation de l'injectivité de $g\circ f$.
2. Considérer un antécédent par $g\circ f$ de $z\in G$. Comment en déduire un antécédent par g de z ?

▷

Dans une structure algébrique, l'inversibilité d'un élément a se traduit par l'existence de b tel que $ab = ba = 1$ (ou 1 est le neutre multiplicatif de la structure). La propriété suivante est donc à mettre en rapport avec une propriété d'inversibilité.

Théorème 2.3.38 (Caractérisation de la bijectivité)

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. L'application f est bijective si et seulement s'il existe $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$, donc si f est inversible.
De plus, dans ce cas, la fonction g est unique.

◁ **Éléments de preuve.**

Sens direct par analyse/synthèse : l'analyse montre que $g(y)$ doit être l'unique antécédent par f de y.

Sens réciproque par la proposition 2.3.37. ▷

Avertissement 2.3.39

Attention, il ne suffit pas que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ ou $f \circ g = \mathrm{id}_F$ pour obtenir la bijectivité : il faut avoir les deux égalités.

Définition 2.3.40 (Application réciproque)

Dans la situation du théorème précédent, l'application g telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$ est appelée *application réciproque* de f, et est notée f^{-1}.

Proposition 2.3.41 (Calcul de f^{-1})

Soit $f : A \to B$ une application. Si $g : B \to A$ vérifie :

$$\forall y \in B, \quad (\forall x \in A, \ f(x) = y \iff x = g(y)),$$

alors f est une bijection et $g = f^{-1}$

Ainsi, la bijectivité s'obtient en résolvant l'équation $f(x) = y$ de l'inconnue x, à paramètre $y \in B$, en montrant qu'il existe une unique solution à cette équation, qu'on écrit sous la forme $x = g(y)$.

Exemple 2.3.42

Montrer que $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$ définie par

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

est une bijection, et exprimer sa réciproque.

Proposition 2.3.43 (Réciproque d'une composée)

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux bijections. Alors la réciproque de la bijection $g \circ f$ est :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

◁ **Éléments de preuve.**

Vérifier que $f^{-1} \circ g^{-1}$ satisfait aux propriétés définissant la réciproque. C'est en fait une propriété plus générale de l'inverse d'un produit dans une structure algébrique associative. Attention à l'interversion des termes f et g. ▷

Le théorème 2.3.38 peut se décomposer en caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité séparément, mais cela nécessite l'axiome du choix, pour l'une des deux caractérisations.

Théorème 2.3.44 (Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité, HP)

Soit $f : E \longrightarrow F$ une fonction.

1. *f est surjective si et seulement s'il existe une application $g : F \to E$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_F$, donc si et seulement si f est inversible à droite. Dans ce cas, g est injective*
2. *Si $E \neq \varnothing$, f est injective si et seulement s'il existe une application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$, donc si et seulement si f est inversible à gauche. Dans ce cas, g est surjective*

◁ **Éléments de preuve.**

Un peu le même principe que pour la bijectivité, mais dans un cas, on peut avoir plusieurs choix possibles, dans l'autre, on peut ne pas avoir d'antécédent (attribuer à ces éléments une image quelconque choisie à l'avance).

La preuve donnée indique que la première propriété est dépendante de l'axiome du choix. ▷

On termine l'étude de la bijectivité par un lemme utile pour construire des bijections.

Lemme 2.3.45 (Recollement de bijections)

Soit A_1, A_2, B_1 et B_2 des ensembles tels que A_1 et A_2 soient disjoints ainsi que B_1 et B_2. Soit $f_1 : A_1 \to B_2$ et $f_2 : A_2 \to B_2$ deux bijections. Alors l'application f définie sur $A_1 \uplus A_2$ par :

$$\forall x \in A_1 \uplus A_2, \quad f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } a \in A_1 \\ f_2(x) & \text{si } a \in A_2 \end{cases}$$

est une bijection de $A_1 \uplus A_2$ sur $B_1 \uplus B_2$.

◁ **Éléments de preuve.**

Au choix : construire une réciproque de f, ou alors compter les antécédents de chaque élément de $B_1 \uplus B_2$. ▷

3 Relations

« Les mathématiciens n'étudient pas des objets mais les relations entre ces objets. »

(Henri Poincaré)

« Ce n'est pas un lemme, et il n'est pas de moi »

(Max Zorn, à propos du « lemme de Zorn »)

Comme on l'a vu, les applications, ou plus généralement les fonctions, sont une façon de mettre en relation deux ensembles, donc de faire interagir nos objets formels que sont les ensembles. Mais le rôle des deux ensembles ainsi mis en relation n'est pas symétrique, du fait de la contrainte d'unicité de l'image, alors qu'on n'a pas la contrainte d'unicité de l'antécédent. Nous voyons dans ce chapitre comment définir une notion plus générale, permettant de retrouver cette symétrie perdue.
Ayant déjà étudié les relations définissant les applications ou les fonctions (relations applicationnelles ou fonctionnelles), nous étudierons plus précisément les deux autres types importants de relations à bien connaître : les relations d'équivalence, et les relations d'ordre.

I Définitions générales

I.1 Relations

Définition 3.1.1 (relation binaire)

- Une *relation binaire* entre deux ensembles E et F est un sous-ensemble G de $E \times F$.
- On note souvent $x\mathcal{R}y$ pour dire que $(x, y) \in G$, et on dit que x est en relation avec y. On parle alors de la relation $\mathcal{R}$.
- Certains types de relation sont aussi notés $x \equiv y$, ou $x \sim y$, ou $x \leqslant y$...

Exemples 3.1.2

1. L'inclusion entre ensemble. L'appartenance entre ensembles.
2. Les congruences d'entiers.

Comme pour les fonctions, on peut représenter une relation par un diagramme sagittal. Par exemple, la relation représentée par la figure 3.1 est la relation entre $[\![1, 5]\!]$ et $[\![1, 4]\!]$ définie par le sous-ensemble $G = \{(1,2), (1,3), (2,3), (2,4), (4,1), (5,1), (5,2), (5,4)\}$, donc la relation définie par $1\mathcal{R}2$, $1\mathcal{R}3$, $2\mathcal{R}3$, $2\mathcal{R}4$, $4\mathcal{R}1$, $5\mathcal{R}1$, $5\mathcal{R}2$, $5\mathcal{R}4$, les autres paires n'étant pas en relation.

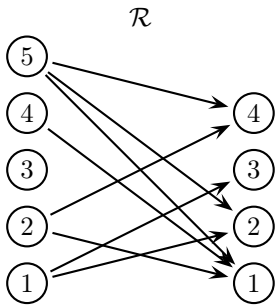


FIGURE 3.1 – Diagramme sagittal d'une relation

E \ F	1	2	3	4
1		×	×	
2	×			×
3				
4	×			
5	×	×		×

FIGURE 3.2 – Représentation tabulaire (ou matricielle) d'une relation

On peut également représenter cette relation sous forme d'un tableau à double-entrée, en décidant de représenter par deux signes distinctifs le fait que $x\mathcal{R}y$ soient en relation ou non (par exemple par une croix ou par rien) Ainsi, la relation précédente est représentée par le tableau de la figure 3.2

Remarque 3.1.3

Les fonctions et les applications sont des cas particuliers de relation binaire. Une relation binaire définissant une fonction est appelée relation fonctionnelle.

Plus précisément :

Définition 3.1.4 (relation fonctionnelle (resp. applicationnelle))

Une relation $\mathcal{R}$ entre E et F est *fonctionnelle* (resp. *applicationnelle*) si pour tout x de E il existe au plus un (resp. un et un seul) y de F tel que $x\mathcal{R}y$.

Lorsque $\mathcal{R}$ est une relation entre E et lui-même, on dit que $\mathcal{R}$ est une relation sur E. Dans ce cas, on dispose d'une troisième représentation possible, correspondant à la représentation sagittale dans laquelle on a identifié les éléments des deux ensembles de départ et d'arrivée. On obtient de la sorte un graphe orienté dont les sommets sont les éléments de E. Par exemple, la relation définie sur $[\![1,4]\!]$ par $1\mathcal{R}1$, $1\mathcal{R}3$, $2\mathcal{R}3$, $3\mathcal{R}2$, $3\mathcal{R}4$, $4\mathcal{R}1$ et $4\mathcal{R}4$ est représentée par le graphe de la figure 3.3

I.2 Définition de quelques propriétés sur les relations

On définit maintenant un certain nombre de propriétés susceptibles d'être satisfaites par une relation d'un ensemble E dans lui-même. Les 4 premières sont à bien connaître, les 2 dernières sont plus anecdotiques.

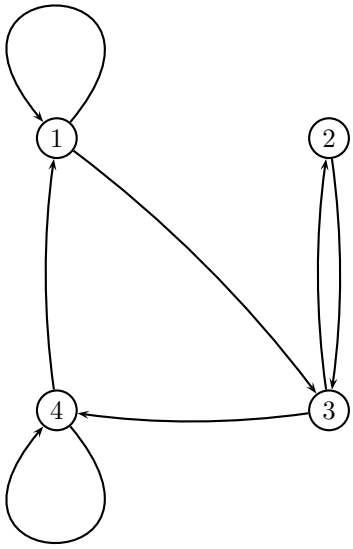


Figure 3.3 – Graphe d'une relation sur E

Définition 3.1.5 (reflexivité, symétrie, antisymétrie, transitivité *et al.*)

Soit $\mathcal{R}$ une relation sur E. On dit que :

- $\mathcal{R}$ est réflexive si pour tout $x \in E$, $x\mathcal{R}x$;
- $\mathcal{R}$ est symétrique si pour tout $(x,y) \in E^2$, $x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$;
- $\mathcal{R}$ est antisymétrique si pour tout $(x,y) \in E^2$, $(x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}x) \implies (x = y)$;
- $\mathcal{R}$ est transitive si pour tout $(x,y,z) \in E^3$, $(x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) \implies (x\mathcal{R}z)$.
- $\mathcal{R}$ est irréflexive (ou antiréflexive) si pour tout x, on a $\neg(x\mathcal{R}x)$
- $\mathcal{R}$ est asymétrique si $x\mathcal{R}y \implies \neg(y\mathcal{R}x)$.

Remarque 3.1.6

Comment qualifieriez vous une relation antisymétrique et irréflexive ?

Nous allons maintenant définir deux types de relations que l'on rencontre fréquemment.

II Relations d'équivalence

II.1 Définitions et exemples

Définition 3.2.1 (relation d'équivalence)

Une relation d'équivalence sur E est une relation réflexive, symétrique et transitive. On note souvent une relation d'équivalence $x \equiv y$ ou $x \sim y$.

Exemples 3.2.2

1. Égalité.
2. Congruences modulo n dans $\mathbb{N}$ (notation $\equiv_{[n]}$ ou $\equiv ...[n]$).
3. Congruences dans $\mathbb{R}$.
4. Appartenance à la même part d'une partition.
5. La relation définissant $\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$: $(p,q) \equiv_{\mathbb{Q}} (p',q')$ si et seulement $pq' = p'q$ (ces deux couples vont définir le même rationnel).

6. Conjugaison dans $\mathfrak{S}_n$: σ_1 et σ_2 sont conjuiguées si et seulement s'il existe une permutation τ telle que $\sigma_2 = \tau \circ \sigma_1 \circ \tau^{-1}$.

Une relation d'équivalence sur un ensemble fini peut être représenté par son graphe orienté (figure 3.4). Ce graphe possède un certain nombre de caractéristiques :

- Le graphe se décompose en un certain nombre de blocs non reliés les uns les autres, les points au sein d'un même bloc étant reliés (on parle de composantes connexes du graphe)
- Chaque point appartient à un bloc (il y est éventuellement seul). Ainsi, les blocs forment une partition de E.
- À l'intérieur de chaque bloc, toutes les flèches possibles sont présentes (y compris celles reliant un point et lui-même) : il s'agit d'un sous-graphe complet.

Les différents blocs sont appelés *classes d'équivalence*.

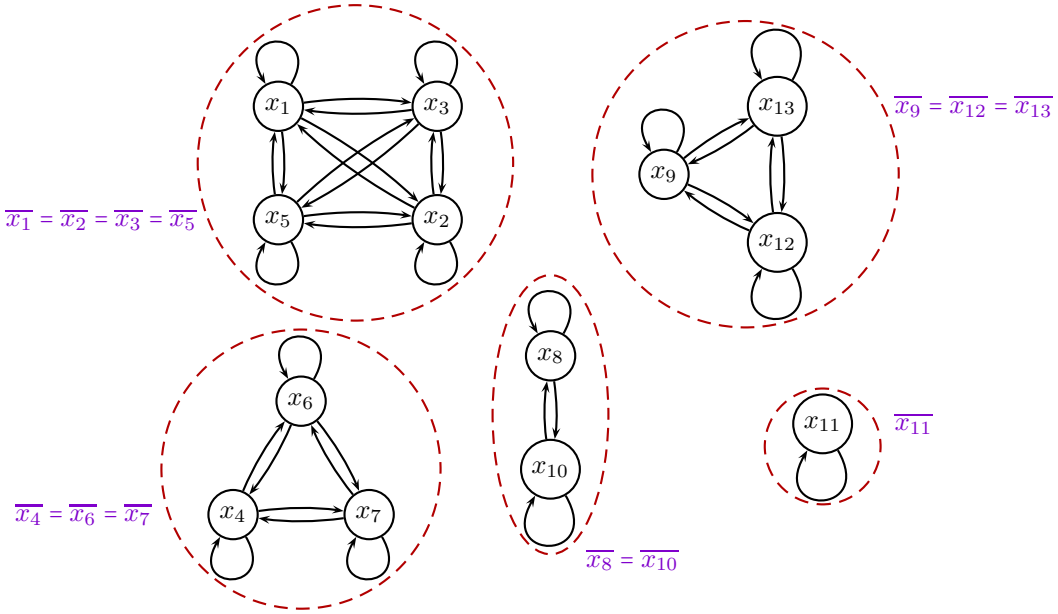


FIGURE 3.4 – Graphe d'une relation d'équivalence sur $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_{13}\}$.

Cette situation se généralise. C'est ce que nous étudions dans le paragraphe suivant.

II.2 Classes d'équivalence, ensembles quotients

Définition 3.2.3 (classes d'équivalence)

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E, et $x \in E$. La *classe d'équivalence de x sous la relation $\mathcal{R}$* est le sous-ensemble C_x de E constitué des éléments en relation avec x :

$$C_x = \{y \in E \mid x\mathcal{R}y\}.$$

Lemme 3.2.4

Si y et z sont dans une même classe d'équivalence, alors $y\mathcal{R}z$.

◁ **Éléments de preuve.**

C'est juste la transitivité, en passant par x, définissant la classe commune. ▷

Théorème 3.2.5 (Partition formée par les classes d'équivalence)

Soit E un ensemble, et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. L'ensemble des classes d'équivalence sous $\mathcal{R}$ forme une partition de E.

◁ **Éléments de preuve.**

Il suffit de montrer que si $C_x \cap C_y \neq \varnothing$, alors $C_x = C_y$, et par symétrie, $C_x \subset C_y$ suffit. Là encore, c'est la transitivité, en passant par un point apparenant aux 2 classes. ▷

En particulier, si $y \in C_x$, alors $C_x = C_y$.

Pour les propriétés « stables » par la relation d'équivalence, les points d'une même classe d'équivalence jouent des rôles similaires, et n'ont pas lieu d'être distingués. On formalise cela en introduisant un ensemble dont les éléments sont les classes d'équivalences (ainsi, tous les points d'une même classe représentent la même classe, et sont considérés comme égaux dans ce nouvel ensemble) :

Définition 3.2.6 (Ensemble quotient, HP)

L'ensemble des classes sous la relation $\mathcal{R}$ s'appelle *l'ensemble quotient de E par $\mathcal{R}$*, et est noté $E/\mathcal{R}$. C'est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$.

Ainsi, en notant $\overline{x}$ la classe d'équivalence d'un élément x de E, l'ensemble $E/\mathcal{R}$ est l'ensemble formé des éléments $\overline{x}$, où l'on impose $\overline{x} = \overline{y}$ dès que $x\mathcal{R}y$.

Exemples 3.2.7

1. On définit $\mathbb{Q}$ comme étant le quotient $(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*)/\equiv_{\mathbb{Q}}$.
2. On définit $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/\equiv_{[n]}$. C'est un ensemble à n éléments.

Définition 3.2.8 (projection canonique)

On appelle projection canonique de E sur $E/\mathcal{R}$ l'application $\pi_{\mathcal{R}}$ qui à x associe sa classe $\overline{x}$. Par définition, $\pi_{\mathcal{R}}$ est surjective, et vérifie :

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad x\mathcal{R}y \Longrightarrow \pi_{\mathcal{R}}(x) = \pi_{\mathcal{R}}(y).$$

Cette projection canonique vérifie la propriété importante suivante (une telle propriété est appelée « propriété universelle ») :

Théorème 3.2.9 (Factorisation d'une application constante sur les classes d'équivalence)

Soit $f : E \to F$. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Pour tout $(x,y) \in E^2$, $x\mathcal{R}y \Longrightarrow f(x) = f(y)$;

(ii) il existe $g : E/\mathcal{R} \to F$ tel que $f = g \circ \pi_{\mathcal{R}}$.

◁ **Éléments de preuve.**

Définir $g(\overline{x})$ comme étant la valeur commune de tous les $f(y)$, pour $y \in \overline{x}$. ▷

On dit dans la situation ci-dessus que la fonction f « passe au quotient ».

Ce résultat se généralise sans difficulté pour des fonctions de plusieurs variables, $f : E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$, les E_i étant chacun muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}_i$. Dès lors que f « respecte » les relations d'équivalences (donc la valeur de f ne dépend pas du choix des réprésentants des classes d'équivalence), on a la possibilité de factoriser f au travers de l'espace produit des espaces quotients $(E_1/\mathcal{R}_1) \times \cdots \times (E_n/\mathcal{R}_n)$. Cela permet notamment de définir assez facilement des lois (addition, multiplication) sur des ensembles quotients. C'est ce que nous étudions ci-dessous.

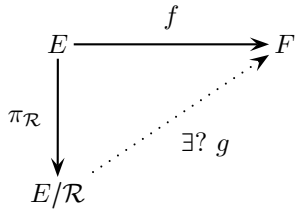


FIGURE 3.5 – Factorisation d'une application constante sur les classes d'équivalence

II.3 Congruences

L'ensemble $\mathbb{Z}$ étant muni d'une loi d'addition et d'une loi de multiplication, on aimerait savoir si ces lois « passent au quotient » autrement dit, si elles permettent de définir une somme et un produit sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. La notion de congruence est adaptée à cette situation.

Définition 3.2.10 (Congruence)

Soit E un ensemble, muni d'un certain nombre d'opérations $\times_1$, $\times_2, \ldots, \times_n$. On dit qu'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ est une congruence sur $(E, \times_1, \ldots, \times_n)$ si

$$\forall (x, y, x', y') \in E^4,\ \forall i \in [\![1, n]\!],\quad (x \mathcal{R} x') \wedge (y \mathcal{R} y') \Longrightarrow (x \times_i y) \mathcal{R} (x' \times_i y').$$

Proposition 3.2.11 (Congruence des entiers)

La relation de congruence des entiers $\equiv_{[n]}$ est une congruence sur $(\mathbb{Z}, +, \times)$.

◁ **Éléments de preuve.**

Vérifications de divisibilité immédiates. ▷

Proposition 3.2.12 (Passage au quotient des opérations, HP)

Soit $(E, \times_1, \ldots, \times_n)$ un ensemble muni de n lois d'opérations, et $\mathcal{R}$ une congruence sur $(E, \times_1, \ldots, \times_n)$. Alors on peut définir sur $E/\mathcal{R}$ des lois $\dot{\times}_1, \ldots, \dot{\times}_n$ telles que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, et tout $(x, y) \in E^2$:

$$\overline{x} \dot{\times}_i \overline{y} = \overline{x \times_i y}.$$

◁ **Éléments de preuve.**

La valeur de $x \times y$ ne dépendant que de la classe de x et celle de y, on peut définir $\overline{x} \times \overline{y}$ comme étant la valeur commune des $x' \times y'$, pour $x' \in \overline{x}$ et $y' \in \overline{y}$. ▷

Corollaire 3.2.13 (Addition et multiplication de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$)

On peut munir $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ d'une addition $\dot{+}$ et d'une multiplication $\dot{\times}$, notées plus simplement $+$ et $\times$ (la multiplication est parfois aussi simplement notée par un point $\cdot$, ou même simplement omise), telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2,\quad \overline{x} + \overline{y} = \overline{x + y} \text{ et } \overline{x} \times \overline{y} = \overline{x \times y}$$

Exemple 3.2.14

Table des lois de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

III Relations d'ordre

Une autre famille de relation est celle qui permet de définir des inégalités.

III.1 Définitions générales

Une relation d'ordre, sans autre précision, est toujours une relation d'ordre au sens large :

Définition 3.3.1 (relation d'ordre large)
Une relation d'ordre sur E est une relation réflexive, antisymétrique et transitive. On note souvent $x \leqslant y$ pour indiquer que y est en relation avec x. Les écritures $x \leqslant y$ et $y \geqslant x$ sont équivalentes.

Exemples 3.3.2

1. L'inégalité usuelle $\leqslant$ sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$ définit une relation d'ordre sur ces ensembles.
2. L'inégalité opposée $\geqslant$ définit une autre relation d'ordre ; il s'agit de la relation réciproque de $\leqslant$.
3. La relation de divisibilité $a \mid b$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$ mais pas sur $\mathbb{Z}$.
4. L'inclusion dans $\mathcal{P}(E)$.
5. L'ordre produit sur $\mathbb{N}^n$
6. L'ordre lexicographique sur $E \times F$, et plus généralement sur $E_1 \times \cdots \times E_n$, tous ces ensembles étant ordonnés

La figure 3.6 donne le graphe orienté associé à une relation d'ordre sur un ensemble fini. Certaines flèches sont nécessairement présentes (les flèches d'un élément vers lui-même, par reflexivité), ou déduites des autres (par transitivité). On se limite alors souvent au digramme constitué par les flèches élémentaires (engendrant les autres), c'est-à-dire les flèches entre deux éléments consécutifs. La restiction à ces flèches définit ce qu'on appelle la relation de couverture (on dit qu'un élément x couvre y si $x \geqslant y$, $x \neq y$, et s'il n'existe pas z tel que $x > z > y$). Le graphe associé à cette relation de couverture est appelé diagramme de couverture de la relation $\leqslant$.
Pour l'exemple donné dans la figure 3.6, on obtient alors le diagramme de la question 3.7. Par convention, dans ce diagramme, les flèches vont en montant : plus un élément est placé haut, plus il est « grand » pour le relation d'ordre (à condition de pouvoir être comparé).

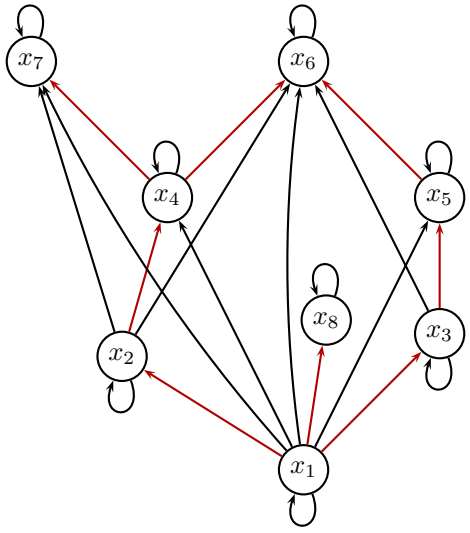


Figure 3.6 – Graphe d'une relation d'ordre sur $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_8\}$.

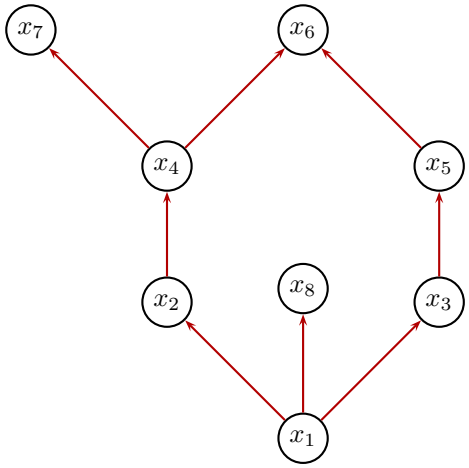


FIGURE 3.7 – Diagramme de couverture de la relation de la figure 3.6

Dans $\mathbb{R}$, vous avez l'habitude d'utiliser la relation d'ordre stricte. Elle peut se définir de façon générale :

Définition 3.3.3 (Relation d'ordre stricte)

Une relation d'ordre stricte est une relation antiréflexive et transitive.

Proposition 3.3.4 (Antisymétrie d'une relation d'ordre stricte)

Une relation d'ordre stricte est antisymétrique.

◁ **Éléments de preuve.**

Montrer qu'on ne peut pas avoir $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$. En quoi cela entraîne-t-il l'antisymétrie ? ▷

Proposition 3.3.5 (D'une relation d'ordre large à une relation d'ordre stricte)

- *Toute relation d'ordre large $\leqslant$ définit une relation d'ordre stricte par $x < y$ si et seulement si $x \leqslant y$ et $x \neq y$.*
- *Réciproquement, toute relation d'ordre strict $<$ définit une relation d'ordre large $\leqslant$ par $x \leqslant y$ si et seulement si $x < y$ ou $x = y$.*

Remarque 3.3.6

Lorsqu'on parle de relation d'ordre, sans autre précision, il est en général sous-entendu qu'il s'agit d'une relation d'ordre large.

Dans $\mathbb{R}$ muni de l'ordre usuel, on peut comparer deux à deux tous les éléments, mais ce n'est pas toujours le cas (cas de la divisibilité par exemple). Cette remarque motive la définition suivante :

Définition 3.3.7 (ordre total, ordre partiel)

- Soit $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur un ensemble E. On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre total si pour tout $(x, y) \in E$, soit $x \leqslant y$ soit $y \leqslant x$.
- Dans le cas contraire, on dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre partiel.

Exemples 3.3.8

1. L'ordre défini par le diagramme de la figure 3.7 n'est pas total : par exemple x_8 et x_7 ne sont pas comparables. En fait, le diagramme associé à une relation d'ordre total est linéaire.
2. L'ordre usuel sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$, ainsi que l'ordre lexicographique sur $\mathbb{N}^n$, ou sur l'ensemble des mots définis à partir d'un alphabet sont des ordres totaux.
3. L'ordre produit sur $\mathbb{N}^n$ (pour $n \geqslant 2$), la relation de divisibilité dans $\mathbb{N}^*$, la relation d'inclusion dans $\mathcal{P}(E)$ (lorsque E possède au moins 2 éléments), le raffinement des partitions de E (lorsque E possède au moins 3 éléments) sont des ordres partiels.
4. Si $\leqslant$ est un ordre total, alors $\geqslant$ est un ordre total.
5. Si E et F sont munis d'ordres totaux, l'ordre lexicographique sur $E \times F$ est total.

Proposition/Définition 3.3.9 (restriction d'une relation d'ordre)

Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre $\mathcal{R}$, et A un sous-ensemble de E. Alors $\mathcal{R}$ définit sur A une relation d'ordre $\mathcal{R}'$ par :

$$\forall (x,y) \in A^2, \quad x\mathcal{R}'y \iff x\mathcal{R}y.$$

Il s'agit de la restriction à A de la relation $\mathcal{R}$, ou de la relation induite par $\mathcal{R}$ sur A. Elle est généralement notée $\mathcal{R}$ également.

III.2 Minimalité, maximalité

Définition 3.3.10 (minimum, maximum)

Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble muni d'une relation d'ordre.

1. Un élément m de E est appelé *plus petit élément de E* (ou *élément minimum*) si : $\forall m' \in E,\ m \leqslant m'$.
2. Un élément M de E est appelé *plus grand élément de E* (ou *élément maximum*) si : $\forall m' \in E,\ M \geqslant m'$.
3. Étant donné un sous-ensemble A de E, un élément minimum (*resp.* maximum) de A est un élément minimum (*resp.* maximum) pour la relation d'ordre $\mathcal{R}'$ induite par $\mathcal{R}$ sur A.

Proposition 3.3.11 (unicité du minimum)

*S'il existe, le plus petit élément de E (*resp. *de $A \subset E$) est unique. De même pour le plus grand élément.*

◁ **Éléments de preuve.**

S'il en existe 2, x et y, alors $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$. ▷

Un ensemble n'a pas nécessairement de minimum ou de maximum ($\mathbb{Z}$ par exemple, ou $\mathcal{P}(E) \setminus \{E, \varnothing\}$, pour la relation d'inclusion).

Exemple 3.3.12

Dans l'exemple de la figure 3.7, E admet-il un minimum ? un maximum ?

Définition 3.3.13 (élément minimal, maximal ; HP)

Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble muni d'une relation d'ordre.

1. Un élément m de E est appelé *élément minimal* de E s'il n'existe pas d'élément x de E tel que $x < m$.
2. Un élément M de E est appelé *élément maximal* s'il n'existe pas d'élément x de E tel que $x > M$.

Remarque 3.3.14 (distinction élément minimum/élément minimal)

Si l'ordre défini sur E est total, la notion d'élément minimal coïncide avec la notion d'élément minimum. Mais ce n'est plus vrai si la relation n'est que partielle, car $x < m$ n'est dans ce cas pas la négation de $x \geqslant m$.

Ainsi, m est minimum si et et seulement si pour tout $x \in E$, on a $x \geqslant m$, alors que m est minimal si et seulement si pour tout $x \in E$, soit $x \geqslant m$, soit x est non comparable à E.

Exemples 3.3.15

1. Dans l'exemple de la figure 3.7, quels sont les éléments maximaux ? Sont-ils maximum ? Quels sont les éléments minimaux ?

   Dans un diagramme de ce type, comment décririez-vous un élément maximal ?
2. Soit E ayant au moins deux éléments. Dans $\mathcal{P}(E) \setminus \{E, \varnothing\}$, décrire les éléments minimaux et maximaux.

   A-t-on unicité de l'élément minimal, maximal ?
3. Décrire les éléments minimaux et maximaux dans $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ muni de la divisibilité. Y a-t-il un minimum ? un maximum ?
4. Trouver un ensemble ordonné ayant un unique élément minimal, mais pas d'élément minimum.

Proposition 3.3.16 (existence d'un élément minimal dans un ensemble fini, HP)

Soit E un ensemble ordonné fini *et* non vide. *Alors E admet un élément minimal.*

◁ **Éléments de preuve.**

Considérer la chaîne de longueur maximale, et son plus petit élément. Ou alors, en raisonnant par l'absurde, constuire une chaîne infinie. ▷

Définition 3.3.17 (minorant, majorant)

Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble muni d'une relation d'ordre. Soit $A \subset E$.

1. Un minorant m de A est un élément $m \in E$ tel que : $\forall a \in A,\ a \geqslant m$
2. Un majorant M de A est un élément $M \in E$ tel que : $\forall a \in A,\ a \leqslant M$

Définition 3.3.18 (borne supérieure, borne inférieure)

Soit $(E, \leqslant)$, et soit $A \subset E$.

1. La borne inférieure de A (ou *infimum* de A) dans E, notée $\inf\limits_{x \in A}{}_{E}\ x$ ou $\inf\limits_{x \in A} x$ ou $\inf A$ est le plus grand des minorants de A, **s'il existe**.
2. La borne supérieure de A (ou *supremum* de A) dans E, notée $\sup\limits_{x \in A}{}_{E}\ x$ ou $\sup\limits_{x \in A} x$ ou $\sup A$ est le plus petit des majorants de A, **s'il existe**.
3. Étant donnés $x_1, \ldots, x_n$ dans E, la borne inférieure (*resp.* la borne supérieure) des éléments $x_1, \ldots, x_n$, notée $\inf(x_1, \ldots, x_n)$ (*resp.* $\sup(x_1, \ldots, x_n)$) est la borne inférieure (*resp.* supérieure) de l'ensemble $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Exemple 3.3.19 (Propriété fondamentale de $\mathbb{R}$)

Tout sous-ensemble non vide majoré de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure. Cette propriété soit doit être prise comme axiome pour la construction de $\mathbb{R}$, soit découle immédiatement d'axiomes équivalents (il y a plusieurs façons équivalentes de construire $\mathbb{R}$, en imposant dans le cahier des charges des propriétés différentes).

Avertissement 3.3.20

Attention à l'ensemble dans lequel on considère la borne supérieure. Tout sous-ensemble borné de $\mathbb{Q}$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$, mais pas nécessairement dans $\mathbb{Q}$.

Remarque 3.3.21

Dire qu'un entier s est le plus petit des majorants de A consiste à dire qu'il est un majorant de A et que tout autre majorant de A **lui est comparable** et est plus grand. S'il existe un majorant non comparable à s, s ne peut pas être la borne supérieure.
Ainsi, pour montrer que s est la borne supérieure de A :

- on montre que s est un majorant de A ;
- on montre que si M est un majorant de A, alors $s \leqslant M$.

Exemples 3.3.22 (bornes inférieures, supérieures)

1. Dans $\mathbb{N}^*$ muni de la divisibilité, $\inf(a,b) = \text{pgcd}(a,b)$, et $\sup(a,b) = \text{ppcm}(a,b)$.
2. Dans $\mathcal{P}(E)$, muni de l'inclusion, $\inf(A,B) = A \cap B$, $\sup(A,B) = A \cup B$
3. Soit E muni d'un ordre total. Toute partie majorée de E admet-elle une borne supérieure ?

Proposition 3.3.23

Soit $(E, \leqslant)$, et $A \subset E$. A admet un maximum M (plus grand élément) si et seulement si A admet une borne supérieure b et si $b \in A$. Dans ce cas $M = b$. Énoncé similaire pour le minimum.

◁ **Éléments de preuve.**
Le maximum M, s'il existe, est nécessairement le plus petit des majorants de A, puisqu'il majore A, et que tout majorant de A majore en particulier M. Réciproque évidente, la borne supérieure étant un majorant. ▷

Définition 3.3.24 (Application croissante)

Soit E et F deux ensembles, munis chacun d'une relation d'ordre $\leqslant_E$ et $\leqslant_F$ respectivement. Une application $f : E \to F$ est dite :

- *croissante* si
$$\forall (x,y) \in E^2, \quad x \leqslant_E y \Longrightarrow f(x) \leqslant_F f(y),$$
- *décroissante* si
$$\forall (x,y) \in E^2, \quad x \leqslant_E y \Longrightarrow f(x) \geqslant_F f(y),$$

Avertissement 3.3.25

Prenez garde au fait que les propriétés usuelles des fonctions réelles croissantes ne sont pas toutes vraies dans une situation plus générale. Par exemple, étant donné E un ensemble fini, l'application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathbb{N}$ définie par $X \mapsto \text{Card}(X)$ est strictement croissante mais non injective !

III.3 Le lemme de Zorn (HP)

Pour terminer ce chapitre, nous donnons un résultat équivalent à l'axiome du choix (donc tout aussi indécidable), qui est la version sous laquelle l'axiome du choix est le plus fréquemment utilisé. Pour cela, nous commençons par donner une définition :

Définition 3.3.26 (ensemble inductif, HP)

Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné. On dit que E est un ensemble inductif si pour tout sous-ensemble $F \subset E$ *totalement ordonné*, F admet un majorant dans E.

Exemples 3.3.27

- Tout ensemble ordonné fini et non vide est inductif.
- L'ensemble $(\mathbb{Z}, \leqslant)$ est-il inductif ?
- $(\mathcal{P}(E), \subset)$ est-il inductif ?

Théorème 3.3.28 (lemme de Zorn, ou de Kuratowski-Zorn, HP, admis)

(Avec AC) Tout ensemble inductif admet un élément maximal.

Le lemme de Zorn est en fait équivalent à l'axiome du choix. C'est une façon commode d'utiliser l'axiome du choix.

Exemple 3.3.29

Le recours au lemme de Zorn (et donc à l'axiome du choix) est-il pertinent dans le cas d'un ensemble ordonné fini ?

Même si ce résultat est hors-programme, on aura l'occasion d'en voir deux ou trois applications classiques dans la suite du cours.

4 Sommes et produits

« La totalité est plus que la somme des parties »

(Aristote)

« $1-2+3-4+\cdots=\dfrac{1}{4}$ »

(Leonhard Euler)

« $1+2+3+4+\cdots=-\dfrac{1}{12}$ »

(Srinivasa Ramanujan)

Introduction

Le but de ce chapitre est d'introduire et systématiser l'usage du signe $\sum$ pour désigner une somme d'éléments. Dans la mesure du possible, l'utilisation de cette notation est préférable à celle utilisant des petits points, bien moins rigoureuse. De manière similaire, le signe $\prod$ permettra de manipuler facilement et rigoureusement des produits. Contrairement aux exemples un peu surprenants ci-dessus, nous n'abordons dans ce chapitre que des sommes et produits d'un nombre fini de termes.

I Manipulation des signes $\sum$ et $\prod$

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à la définition de la somme des éléments d'une famille finie $(x_i)_{i\in I}$ de réels ou complexes (ou plus généralement des objets qu'on sait sommer de façon commutative et associative). Le cas de familles infinies relève de techniques plus fines, car comme est est amené à faire une infinité d'opérations, il faut s'assurer que le procédé « converge ». Nous reparlerons de cela plus tard.

I.1 Définition des notations

On rappelle qu'une loi + définie sur un ensemble E est dite commutative si pour tous x, y de E, $x+y = y+x$, et associative si pour tous x, y, z de E, $x + (y + z) = (x + y) + z$. De même pour une loi multiplicative $\times$.

Définition 4.1.1 (signes $\sum$ et $\prod$: définition générale)

Soit I un ensemble fini et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels ou complexes.

- L'expression $\displaystyle\sum_{i\in I} a_i$ désigne la somme de tous les éléments a_i, pour $i \in I$. Ainsi, si $I = \{i_1, \ldots, i_n\}$,

$$\sum_{i\in I} a_i = a_{i_1} + \cdots + a_{i_n}.$$

- L'expression $\prod_{i\in I} a_i$ désigne de même le produit de tous les éléments a_i, pour $i \in I$.
- Lorsque $I = [\![n, m]\!]$, où n et m sont deux entiers tels que $n \leqslant m$, on note $\sum_{i\in[\![n,m]\!]} a_i = \sum_{i=n}^{m} a_i$.

Cette définition ne dépend pas du choix d'une numérotation des éléments de I, du fait de la commutativité et de l'associativité de la somme et du produit dans $\mathbb{C}$. Il s'agit en fait de l'utilisation de la propriété de commutativité généralisée, que nous démontrerons plus rigoureusement lors de l'étude des structures algébriques.

Remarques 4.1.2

1. La lettre i utilisée pour énumérer les éléments de I résulte évidemment d'un choix arbitraire : on peut remplacer cette lettre par toute autre lettre n'ayant pas de signification externe à la somme. On dit que i est une *variable muette*. Ainsi :
$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in I} a_j = \sum_{\beta\in I} a_\beta$$
En revanche, $\sum_{n\in[\![1,n]\!]} a_n$ n'a pas de sens.
2. Par usage, il est assez rare de définir une loi additive non commutative et non associative. Ainsi, en général, à partir du moment où on dispose d'une loi +, on pourra construire des sommes de familles finies de la sorte.
3. En revanche, beaucoup de lois multiplicatives ne sont pas commutatives. Par exemple le produit matriciel. Dans ce cas, le produit tel que défini plus haut est mal défini. Il faut se donner un ordre dans lequel faire les produits (donc un ordre sur les éléments de I). C'est le cas par exemple si on considère un sous-ensemble $[\![0, n]\!]$ de $\mathbb{N}$.

Une somme se définit donc en ajoutant les termes les uns aux autres au fur et à mesure. On peut ainsi la définir par récurrence sur le nombre d'éléments de I, en isolant un élément pour se ramener à une somme plus petite : pour $i_0 \in I$:
$$\sum_{i\in I} a_i = \left(\sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} a_i\right) + a_{i_0}.$$
Il ne faut pas oublier de vérifier que cette définition est indépendante du choix de i_0 à chaque étape (à faire par récurrence d'ordre 2 sur le cardinal de I).
Dans le cas d'une somme indexée sur des entiers consécutifs, il y a un choix naturel :
$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) + a_{n+1}.$$
Cette définition itérative permet de bien comprendre la nécessité de la convention suivante, correspondant à l'initialisation de la récurrence :

Convention 4.1.3 (somme vide, produit vide)
Lorsque $I = \varnothing$, on pose par convention :
$$\sum_{i\in\varnothing} a_i = 0 \qquad \text{et} \qquad \prod_{i\in\varnothing} a_i = 1.$$

Ainsi, si $p < n$, $[\![n, p]\!]$ est vide, donc $\sum_{i=n}^{p} a_i = 0$. Par exemple, $\sum_{i=2}^{1} i^2 = 0$.

Remarque 4.1.4

On notera qu'en général, une somme n'est pas forcément prise sur un ensemble d'entiers successifs, ni même sur un ensemble d'entiers. La seule condition est que **l'ensemble des indices soit fini**. On étudiera le cas où l'ensemble des indices est $\mathbb{N}$ dans le chapitre sur les séries, et plus généralement le cas d'une somme sur une famille dénombrable (cas des familles sommables).

Note Historique 4.1.5

Le signe $\sum$ a été introduit par le mathématicien suisse Leonhard Euler en 1755, le symbole $\prod$ date de Gauss, mais on en trouve trace chez Descartes. Mais leur usage ne s'est pas répandu immédiatement, et de nombreux mathématiciens ont continué à utiliser des points de suspension (par exemple Abel au début du 19^{e} siècle)

Exemples 4.1.6

1. $\sum_{k=1}^{4} k(k-1) = 1(1-1) + 2(2-1) + 3(3-1) + 4(4-1) = 2 + 6 + 12 = 20.$
2. $\sum_{i \in \{2,3,5\}} i^2 = 2^2 + 3^2 + 5^2 = 4 + 9 + 25 = 38.$
3. si $E = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid i + j = 5\} = \{(0,5), (1,4), \cdots, (5,0)\}$, alors
$$\sum_{(i,j) \in E} \frac{i}{j+1} = \frac{0}{6} + \frac{1}{5} + \frac{2}{4} + \frac{3}{3} + \frac{4}{2} + \frac{5}{1} = \frac{87}{10}.$$
4. $\sum_{i \in E} 1 = 1 + \cdots + 1 = |E|$ (autant de termes 1 que d'éléments dans E).

Mettons à part un dernier exemple, définissant une suite de nombres que nous utiliserons souvent :

Définition 4.1.7 (Factorielle)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la factorielle de n, notée $n!$, par :

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k.$$

Ainsi, $n!$ peut être définie par récurrence par $0! = 1$ (convention du produit vide) et la relation :

$$n! = n \times (n-1)!.$$

Dans ce qui suit, on exprime quelques règles de manipulation du symbole $\sum$. La plupart de ces règles ont leurs analogues pour les produits.

I.2 Changements d'indice

Du fait même de la définition à l'aide d'une numérotation (donc d'une bijection), la somme est invariante par bijection. C'est ce qu'exprime le théorème suivant :

Théorème 4.1.8 (Changements d'indice)

Soit I et J deux ensembles finis, et $f : I \to J$ une bijection *de I sur J. Alors, pour toute famille $(b_j)_{j \in J}$,*

$$\sum_{j \in J} b_j = \sum_{i \in I} b_{f(i)}$$

Même règle pour les produits.

◁ **Éléments de preuve.**

Les familles $(b_j)_{j\in J}$ et $(b_{f(i)})_{i\in I}$ sont constituées des mêmes éléments, puisque f est bijective. Une mise en place plus rigoureuse peut se faire en Utilisant la définition récursive, en remarquant que f se restreint/corestreint en une bijection de $I \setminus \{i_0\}$ dans $J \setminus \{f(i_0)\}$. ▷

Cette formule ne fait que traduire le fait que lorsque i parcourt I, les $f(i)$ prennent une et une seule fois chaque valeur j de J, du fait de la bijectivité de f.
En particulier, toute somme sur un ensemble J (fini) peut être réindexé en une somme sur $[\![1,n]\!]$. En effet, si I est de cardinal n, il existe une bijection $\varphi : [\![1,n]\!] \to J$ (il s'agit d'une énumération des éléments de J). On a alors

$$\sum_{j\in J} b_j = \sum_{i\in[\![1,n]\!]} b_{\varphi(i)} = \sum_{i=1}^{n} b_{\varphi(i)}.$$

Voici un cas particulier de changement d'indice particulièrement important :

Corollaire 4.1.9 (changements d'indices par translation)
Soit n, p et ℓ trois entiers tels que $n \leqslant p$. Soit $(a_i)_{i\in[\![n,p]\!]}$ une famille. Alors :

$$\sum_{i=n}^{p} a_i = \sum_{i=n-\ell}^{p-\ell} a_{i+\ell}.$$

Exemple 4.1.10
$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2.$

I.3 Sommation par groupements de terme (ou associativité)

Proposition 4.1.11 (Somme indexée dans une union disjointe)
On suppose que $I = I_1 \uplus I_2$ est une union disjointe, et I fini. Alors :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I_1} a_i + \sum_{i\in I_2} a_i.$$

◁ **Éléments de preuve.**

Récurrence sur le cardinal de I_2. ▷

Exemples 4.1.12

- Avec $I_1 = [\![1,n]\!]$ et $I_2 = [\![n+1,m]\!]$, on obtient la relation suivante, à rapprocher de la relation de Chasles pour les intégrales :
$$\sum_{k=1}^{m} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{m} a_k.$$
- Soit $E = \{0,\cdots,2n-1\}$. En écrivant E sous la forme de l'union de ses éléments pairs et de ses éléments impairs, calculer $\sum_{i=0}^{2n-1} \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.

Plus généralement, on obtient le résultat suivant :

Proposition 4.1.13 (Sommation par groupement de termes, ou formule d'associativité)

Soit I un ensemble fini et $I_1, \dots, I_n$ deux à deux disjoint tels que $I_1 \uplus \cdots \uplus I_n = I$ (autrement dit, $\{I_1, \dots, I_n\}$ est un recouvrement disjoint de I). Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille. Alors

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I_1} a_i + \sum_{i\in I_2} a_i + \cdots + \sum_{i\in I_n} a_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i\in I_j} a_i.$$

◁ **Éléments de preuve.**

S'obtient par récurrence immédiate. ▷

I.4 Linéarité

Proposition 4.1.14 (Linéarité du symbole $\sum$)

Soit I un ensemble fini et $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles (réelles ou complexes), et λ, μ deux nombres réels ou complexes. Alors :

- $\sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i = \sum_{i\in I}(a_i + b_i)$.
- $\lambda \sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I} \lambda a_i$.
- *En combinant les deux égalités :* $\lambda \sum_{i\in I} a_i + \mu \sum_{i\in I} b_i = \sum_{i\in I}(\lambda a_i + \mu b_i)$.

◁ **Éléments de preuve.**

Se ramener par énumération au cas $I = [\![1, n]\!]$, puis récurrence sur n. ▷

Cette proposition énonce le fait que $\sum$ est une « forme linéaire sur l'espace vectoriel des familles indexées par un ensemble fini donné I. » (voir chapitre *Espaces vectoriel et Applications linéaires*)

Corollaire 4.1.15 (somme de termes constants)

Soit E un ensemble fini et a un nombre réel ou complexe. Alors :

$$\sum_{i\in E} a = a \cdot \sum_{i\in E} 1 = a \cdot |E|.$$

Exemple 4.1.16

$$\sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \sum_{k=0}^{n} k^2 + \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exemples 4.1.17

1. $\sum_{i=0}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n+1} b_i = a_0 + \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) + b_{n+1}$.
2. Transformation d'Abel : Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$. Montrer que
$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} B_k(a_k - a_{k+1}) + a_n B_n.$$

I.5 Sommes télescopiques

Définition 4.1.18 (somme télescopique)
On dit qu'une somme $\sum_{k=0}^{n} a_k$ est téléscopique si pour tout $k \in \{0, \cdots, n\}$, on peut écrire de façon simple a_k sous la forme $a_k = b_{k+1} - b_k$.

Les sommes téléscopiques se calculent facilement. La technique utilisée (séparer la somme en deux et faire un changement d'indice sur une des deux sommes) est à retenir : elle s'adapte à des situations plus générales.

Proposition 4.1.19 (calcul des sommes téléscopiques)
Soit $\sum(b_{k+1} - b_k)$ une somme téléscopique. Alors :

$$\sum_{k=0}^{n}(b_{k+1} - b_k) = b_{n+1} - b_0.$$

◁ **Éléments de preuve.**
Soit par récurrence, soit en séparant par linéarité, en faisant un changement d'indice sur l'une des deux sommes, en regroupant sur les indices communes, et en simplifiant. ▷

Exemples 4.1.20

1. Calculer $\sum_{k=0}^{n} k \cdot k!$.
2. Trouver un polynôme P de degré 2 tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x+1) - P(x) = x$. En déduire $\sum_{k=1}^{n} k$.
3. Calculer $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.
4. Calculer de même $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

I.6 Cas des produits

On peut adapter ces résultats au cas des produits :

Proposition 4.1.21 (Règles pour les produits)
Avec des notations cohérentes, on obtient les règles suivantes :

- *Si $I_1 \cap I_2 = \varnothing$,* $\prod_{i\in I_1} a_i \prod_{i\in I_2} a_i = \prod_{i\in I_1\cup I_2} a_i$.
- $\left(\prod_{i\in I} a_i\right)^{\lambda}\left(\prod_{i\in I} b_i\right)^{\mu} = \prod_{i\in I}(a_i^{\lambda} b_i^{\mu})$.
- $\prod_{i\in I} a = a^{|I|}$.

Définition 4.1.22 (produit télescopique)
On dit qu'un produit $\prod_{k=0}^{n} a_k$ est téléscopique si pour tout $k \in \{0, \cdots, n\}$, on peut écrire de façon simple a_k sous la forme $a_k = \frac{b_{k+1}}{b_k}$.

Proposition 4.1.23 (calcul des produits téléscopiques)
Soit $\prod \frac{b_{k+1}}{b_k}$ un produit téléscopique. Alors :

$$\prod_{k=0}^{n} \frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{b_{n+1}}{b_0}.$$

I.7 Sommes multiples

Nous étudions maintenant les sommes multiples. Certaines familles peuvent être indexées sur un produit cartésien (ou au moins un sous-ensemble). Soit K un sous-ensemble de $I \times J$, et $(a_{i,j})_{(i,j)\in K}$ une famille doublement indexée (*i.e.* indexée sur un produit cartésien). Le but est d'étudier la somme $\sum_{(i,j)\in K} a_{i,j}$ en se ramenant à des sommes portant sur un seul des deux indices. Pour cela, on introduit la notion de « coupe » de l'ensemble K.

Définition 4.1.24 (coupes d'un sous-ensemble de $I \times J$, voir figure 4.1)
Soit $K \subset I \times J$.

- Soit $i \in I$; on définit la coupe de K suivant i :

$$K_{i,\bullet} = \{j \in J \mid (i,j) \in K\}.$$

- Soit $j \in J$; on définit la coupe de K suivant j par :

$$K_{\bullet,j} = \{i \in I \mid (i,j) \in K\}$$

Définissons également :

- $K'_{i,\bullet} = \{(i,j) \mid j \in K_{i,\bullet}\} = K \cap (\{i\} \times J) = \{(i,j) \mid (i,j) \in K, j \in J\}$
- $K'_{\bullet,j} = \{(i,j) \mid i \in K_{\bullet,j}\} = K \cap (I \times \{j\}) = \{(i,j) \mid (i,j) \in K, i \in I\}$.

Ainsi, $K_{i,\bullet}$ est le projeté sur J de $K'_{i,\bullet}$ et $K_{\bullet,j}$ est le projeté sur I de $K'_{\bullet,j}$.

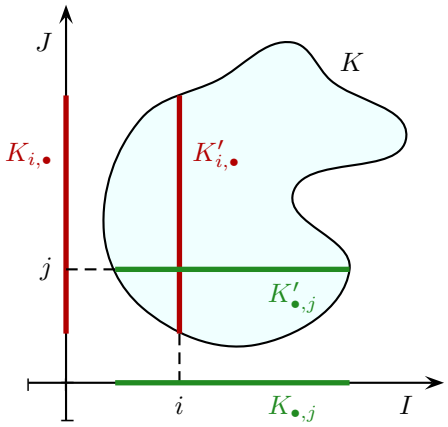


Figure 4.1 – Coupes d'un ensemble

Théorème 4.1.25 (Interversion de signes somme)

Soit $K \subset I \times J$, et $(a_{i,j})_{(i,j)\in K}$ une famille indexée sur K. Alors :

$$\sum_{(i,j)\in K} a_{i,j} = \sum_{i\in I} \sum_{j\in K_{i,\bullet}} a_{i,j} = \sum_{i\in I} \sum_{(i,j)\in K'_{i,\bullet}} a_{i,j}$$
$$= \sum_{j\in J} \sum_{i\in K_{\bullet,j}} a_{i,j} = \sum_{j\in J} \sum_{(i,j)\in K'_{\bullet,j}} a_{i,j}.$$

◁ **Éléments de preuve.**

En effet, $(K'_{i,\bullet})_{i\in I}$ forme un partage de K. Est-ce une partition ? ▷

Dans la pratique ce résultat est très fréquemment utilisé pour intervertir des signes somme (passer du deuxième terme au troisième terme de cette égalité) lorsque les bornes de l'indice de la somme interne dépendent de l'indice de la somme externe (dans ce cas, on essaie de voir la somme interne comme la somme sur une certaine coupe).
En particulier, lorsque $K = I \times J$, on obtient $K_{i,\bullet} = J$ pour tout i, et $K_{\bullet,j} = I$ pour tout I. Ainsi :

Corollaire 4.1.26 (somme sur un pavé)

Soit une famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$. Alors

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} a_{i,j} = \sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j}$$

Une récurrence immédiate permet de généraliser à une somme sur $I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$: on peut alors enchaîner les n sommes dans l'ordre qu'on veut.

Avertissement 4.1.27

Attention, en général, si on n'est pas sur un pavé, il ne suffit pas d'intervertir purement et simplement les signes sommes. Dans la plupart des cas, une telle interversion amène à une expression qui n'a pas de sens.

Ceci est un peu plus qu'un exemple. C'est une technique incontournable :

Exemple 4.1.28 (somme sur un triangle, à savoir faire !)

Montrer que :

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} a_{i,j} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_{i,j}.$$

On peut utiliser les techniques précédentes, ou plus simplement réindexer sur les couples (i,j) vérifiant la condition symétrique $0 \leqslant j \leqslant i \leqslant n$.

I.8 Produits de sommes

Dans la formule de la double somme, si le terme général s'exprime comme produit de deux termes, chacun d'entre eux ne dépendant que d'un des deux indices, on obtient l'expression du produit de deux sommes :

Proposition 4.1.29 (Produit de deux sommes)

$$\left(\sum_{i\in I} a_i\right)\left(\sum_{j\in J} b_j\right) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_i b_j = \sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j.$$

◁ **Éléments de preuve.**

Partant du milieu (égal au terme de droite), factoriser d'abord la somme interne par a_i (à i fixé). On peut ensuite factoriser la somme externe par $\sum b_j$. ▷

Remarque 4.1.30

Avec les a_i et b_j tous égaux à 1, on retrouve l'expression du cardinal d'un produit cartésien.

Remarque 4.1.31

Attention, si on effectue le produit de deux sommes indexées sur le même ensemble, et pour lesquels le même indice est utilisé, pensez à d'abord rendre les indices indépendants (les indices étant muets, changez l'un des deux afin d'avoir deux indices différents) :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right) = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} a_i b_j.$$

Avertissement 4.1.32

Attention, en revanche,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \neq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i,$$

Le terme de gauche est la somme sur un carré alors que la somme de droite n'est la somme que sur la diagonale de ce carré !

Le produit de deux sommes se généralise de la façon suivante :

Théorème 4.1.33 (Distributivité généralisée)

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m_k} a_{k,i}\right) = \sum_{(i_1,\dots,i_n)\in[\![1,m_1]\!]\times\cdots\times[\![1,m_n]\!]} a_{1,i_1}\cdots a_{n,i_n}.$$

◁ **Éléments de preuve.**

Récurrence sur n. ▷

II Sommes classiques à connaître

De nombreuses sommes se calculent en se ramenant à des sommes connues. Pour cette raison, il est important d'avoir un catalogue de sommes (finies) qu'on sait calculer. Ces sommes sont celles de ce paragraphe, auxquelles s'ajoutent la formule du binôme (vue dans le chapitre suivant), les sommes télescopiques, et certaines sommes obtenues par des techniques d'analyse (dérivation des sommes géométriques par exemple).

II.1 Somme des puissances d'entiers

Proposition 4.2.1 (somme des puissances d'entiers, petits exposants)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- $\sum_{k=1}^{n} k^0 = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$
- $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
- $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

◁ **Éléments de preuve.**

D'innombrables possibilités. Géométriquement pour certaines (voir ci-dessous), ou classiquement par récurrence sur n, ou encore de proche en proche, en augmentant petit à petit la valeur de k (voir méthode ci-dessous), ou encore par manipulations de sommes doubles à intervertir etc. ▷

On donne une interprétation géométrique des cas des exposants 1 et 3 dans la figure 4.2

Dans le chapitre suivant, on verra comment la formule du binôme permet de calculer les sommes $\sum_{k=0}^{n} k^p$ de proche en proche.

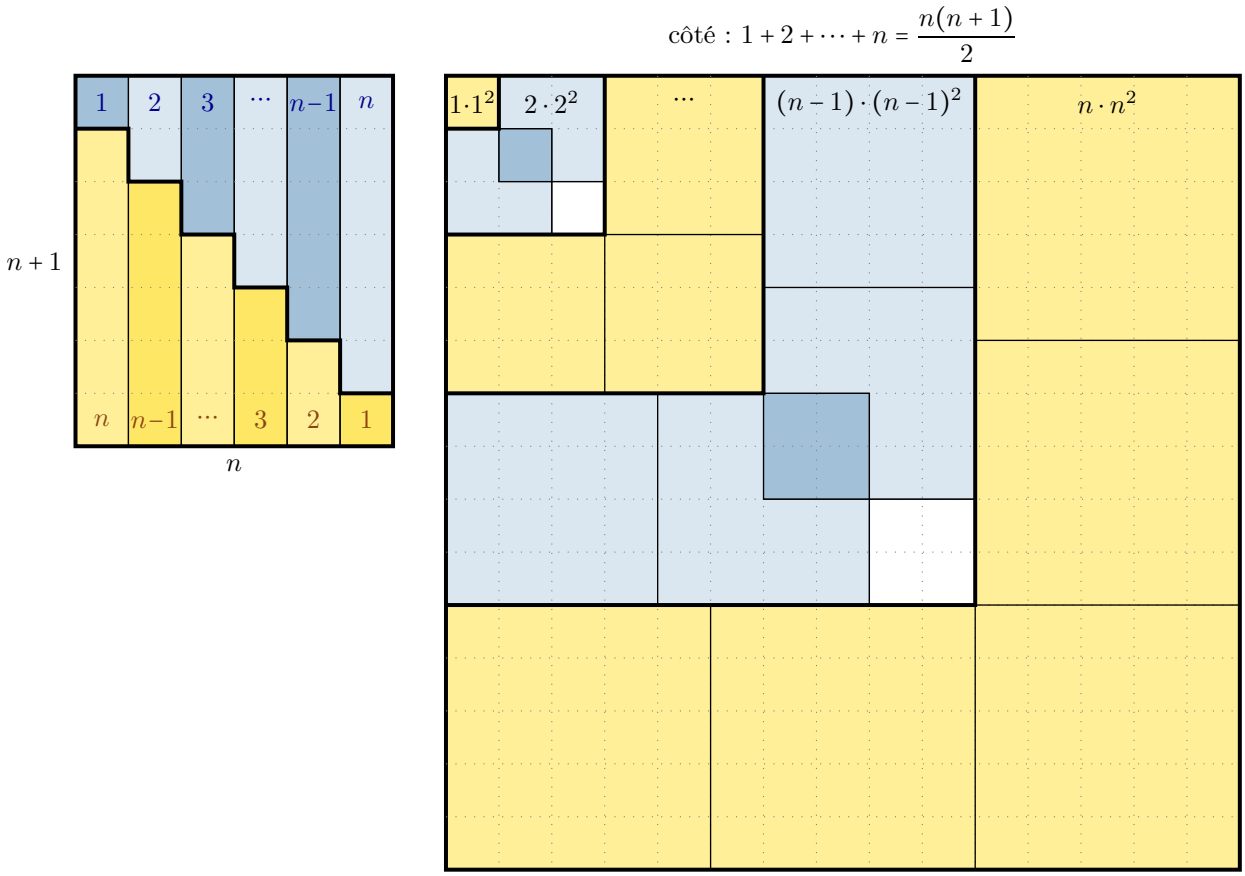


FIGURE 4.2 – Illustration géométrique de $\sum_{k=1}^{n} k$ et $\sum_{k=1}^{n} k^3$.

II.2 Sommes géométriques

La deuxième grande famille de sommes à bien connaître est la famille des sommes géométriques.

Proposition 4.2.2 (Factorisations de $a^n - b^n$ et $a^n + b^n$, Bernoulli)

Soit a et b des nombres complexes et n un entier. Alors :

- $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k$;
- *En particulier, pour $b = 1$, on obtient :*

$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1) = (a-1)\sum_{k=0}^{n-1} a^k;$$

- *si n est impair, alors :*

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1}) = (a+b)\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a^{n-1-k}b^k;$$

◁ **Éléments de preuve.**

Télescopage. ▷

Exemple 4.2.3

1. Que retrouve-t-on pour $n = 2$?
2. Quelles sont les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $1 + X + X^2$? du polynôme $1 + X + X^2 + X^3$? Et plus généralement ?

Proposition 4.2.4 (Sommes géométriques)

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } z = 1 \\ \dfrac{1 - z^{n+1}}{1 - z} & \text{si } z \neq 1. \end{cases}$$

◁ **Éléments de preuve.**

Résulte de la factorisation de Bernoulli. ▷

Exemples 4.2.5

1. Calculer $\sum_{k=0}^{4n} (2\,\mathrm{i})^k$.
2. Calculer $\sum_{k=0}^{n} p^{2k}$ en fonction de $p \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
3. Calculer, pour $n \geqslant 4$, $\sum_{k=6}^{n+2} \mathrm{e}^{-3k}$.

5 Cardinaux et dénombrement

"What's one and one and one and one and one and one and one and one and one ?"
"I don't know," said Alice. "I lost count."
"She can't do Addition."

(Lewis Carroll)

Le dénombrement est à l'origine des mathématiques : compter.

Dénombrer un ensemble d'objets, c'est déterminer le cardinal de cet ensemble. Le dénombrement se base souvent sur la combinatoire, qui est l'étude des configurations possibles d'un ensemble d'objets, donc l'étude de la structure d'un ensemble, passant éventuellement par une description décomposée des objets (ce qui correspond à une construction par choix successifs), ou un tri des objets suivant certains critères.

La clé du dénombrement combinatoire est la notion de bijection : si je peux construire une correspondance un-à-un entre les objets d'un ensemble E et les objets d'un ensemble F (c'est-à-dire une bijection de E dans F), alors E a autant d'objets que F.
C'est d'ailleurs, comme nous l'avons vu, comme cela qu'on définit le cardinal d'un ensemble fini, par comparaison à un ensemble de type $[\![1, n]\!]$, correspondant à une énumération des éléments de E (l'action de compter)

Par la suite, il est souvent un peu maladroit de revenir systématiquement à la définition en comparant à un ensemble $[\![1, n]\!]$, et on cherche plutôt la mise en bijection avec des ensembles de référence bien connus et étudiés. Une telle méthode nécessite souvent une étude de la structure de l'ensemble étudié, et de la façon de construire les objets de cet ensemble : c'est une méthode relevant de la combinatoire.

Les dénombrements sont la base d'un grand nombre de calculs de probabilités, notamment dans une situation d'équiprobabilité : dans ce cas, en effet, de façon assez intuitive, la probabilité d'un événement est le rapport entre le nombre d'issues favorables et le nombre total d'issues possibles. Même dans des situations plus complexes, les dénombrements élémentaires gardent une place centrale.

I Cardinaux des ensembles finis

I.1 Ensembles finis et cardinaux

Dans cette section, on définit rigoureusement la notion d'ensemble fini et de cardinal. On justifie les propriétés, intuitivement assez évidentes, relatives aux cardinaux de certaines constructions ensemblistes.

Définition 5.1.1 (Définition de la cardinalité selon Frege)

On dit que deux ensembles E et F ont *même cardinal* s'il existe une bijection de E à F. On note $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$.

Définition 5.1.2 (Ensemble fini)

Soit E un ensemble. On dit que E est fini si et seulement s'il existe un entier n et une surjection $f : [\![1, n]\!] \to E$, ou de façon équivalente, s'il existe une injection $g : E \to [\![1, n]\!]$.

Proposition 5.1.3 (Sous-ensemble d'un ensemble fini)

Soit F un sous-ensemble de E. Si E est fini, alors F aussi.

◁ **Éléments de preuve.**

Composer l'injection de la définition par l'injection d'inclusion. ▷

Lemme 5.1.4

Tout sous-ensemble F de $[\![1, n]\!]$ peut être mis en bijection avec un ensemble $[\![1, m]\!]$, avec $m \leqslant n$

◁ **Éléments de preuve.**

On peut ranger les éléments de F dans l'ordre : $F = \{x_1 < x_2 < \cdots < x_m\}$ ▷

Lemme 5.1.5 (Bonne définition du cardinal)

Soit n et m deux entiers. S'il existe une bijection de $[\![1, n]\!]$ sur $[\![1, m]\!]$, alors $n = m$.

◁ **Éléments de preuve.**

Récurrence sur n. Composer par une bijection simple pour se ramener au cas $n - 1$. ▷

Proposition/Définition 5.1.6 (Cardinal d'un ensemble fini)

Soit E un ensemble fini. Il existe un unique entier n tel qu'il existe une bijection $f : [\![1, n]\!] \to E$. L'entier n est appelé cardinal de E, et noté $|E|$ ou $\mathrm{Card}(E)$.

Exemples 5.1.7

1. $|E| = 0$ si et seulement si $E = \varnothing$,
2. $|[\![1, n]\!]| = n$.

I.2 Règles de calcul sur les cardinaux

Pour toutes les propriétés sur les cardinaux, on peut la plupart du temps construire des bijections pour se ramener aux définitions, ou alors utiliser le lemme suivant, qui exprime le cardinal à l'aide d'une somme.

Lemme 5.1.8 (Réexpression du cardinal)

Soit E un ensemble fini, et A un sous-ensemble de E. Alors

$$|A| = \sum_{k \in E} \mathbb{1}_A(k).$$

◁ **Éléments de preuve.**

C'est évident intuitivement. Pour une bonne formalisation, par une bijection, on peut se ramener au cas où $A = [\![1, p]\!]$ et $E = [\![1, n]\!]$. ▷

Proposition 5.1.9 (Cardinal d'une union disjointe)

Soit A, B, $A_1, \cdots, A_n$ des ensembles finis.

1. *Si $A \cap B = \varnothing$, alors $|A \uplus B| = |A| + |B|$.*
2. *Plus généralement, si pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$, alors*

$$|A_1 \uplus \cdots \uplus A_n| = |A_1| + \cdots + |A_n|.$$

◁ **Éléments de preuve.**

Le point 2 s'obtient du point 1 par récurrence. Le point 1 résulte du lemme et d'une propriété des sommes vue dans le chapitre précédent. ▷

Proposition 5.1.10 (Cardinal d'un complémentaire)

Si $A \subset B$, alors $|\complement_B A| = |B| - |A|$.

◁ **Éléments de preuve.**

Écrire l'un des trois ensembles en jeu comme union disjointe des deux autres. ▷

Corollaire 5.1.11 (Cardinal d'un sous-ensemble)

Si $A \subset B$, alors $|A| \leqslant |B|$, avec égalité si et seulement si $A = B$.

◁ **Éléments de preuve.**

Quel est le cardinal de $\complement_B A$ lorsqu'on est dans le cas d'égalité ? ▷

Proposition 5.1.12 (Cardinal d'une union quelconque)

Soit A et B des ensembles finis. On a :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

◁ **Éléments de preuve.**

On peut décomposer en $A \cup B = A \uplus (B \setminus (A \cap B))$ ▷

Plus généralement, on a la formule suivante, due à Moivre :

Théorème 5.1.13 (Formule du crible de Poincaré, ou formule d'inclusion-exclusion, HP)

Soit $A_1, \cdots, A_n$ des ensembles finis. Alors :

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| \right) = \sum_{\substack{I \subset [\![1,n]\!] \\ I \neq \varnothing}} (-1)^{|I|-1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|.$$

◁ **Éléments de preuve.**

Il s'agit d'une récurrence sur n. On applique le cas $n = 2$ à $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ et A_{n+1}, on utilise l'hypothèse de récurrence pour le calcul de $|A_1 \cup \cdots \cup A_n|$ ainsi que pour le calcul de $|(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \cap A_{n+1}|$ après avoir distribué l'intersection. Remarquer qu'on obtient tous les termes voulus, les indices (ensemblistes $I \subset [\![1, n+1]\!]$) étant triés en 3 catégories :

- les ensembles I non vides ne contenant pas $n+1$ (la somme obtenue à partir de $A_1 \cup \cdots \cup A_n$)
- les ensembles I non réduits à un élément et contenant $n+1$ (la somme obtenue à partir de $(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \cap A_{n+1}$)
- Le sous-ensemble $I = \{n+1\}$ (le terme $|A_{n+1}|$ apparaissant lors de la première étape.

On peut aussi utiliser un argument combinatoire en montrant directement que pour tout $x \in A_1 \cup \cdots \cup A_n$,

$$\sum_{I \in \mathcal{P}(n)} (-1)^{|I|} \mathbb{1}_{\bigcap_{i \in I} A_i}(x) = 0,$$

ce qui provient du fait que l'ensemble $J = \{i \in I \mid a \in A_i\}$ admet autant de sous-ensembles de cardinal pair que de sous-ensembles de cardinal impair. Ce point sera expliqué combinatoirement dans la suite de ce chapitre. ▷

Proposition 5.1.14 (Cardinal d'un produit cartésien)

1. *Soit A et B deux ensembles finis. Alors $|A \times B| = |A| \times |B|$.*
2. *Plus généralement, soit $A_1, \ldots, A_n$ des ensembles finis. Alors*

$$|A_1 \times \cdots \times A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|.$$

◁ **Éléments de preuve.**

Le point 2 s'obtient du 1 par récurrence.

Pour le point 1, découper en tranche, ou utiliser une bijection de $[\![0, nm-1]\!]$ dans $[\![0, n-1]\!] \times [\![0, m-1]\!]$ définie par une opération arithmétique classique. ▷

I.3 Comparaison des cardinaux en cas d'injectivité et surjectivité

Des résultats liés aux cardinaux des sous-ensembles d'un ensemble fini, on déduit assez facilement la comparaison des cardinaux de E et de F en cas d'existence d'une injection ou d'une surjection entre les deux.

Proposition 5.1.15 (Injectivité, surjectivité, bijectivité et cardinal)

Soit E et F deux ensembles finis, et soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Alors :

1. *Si f est injective,* $\mathrm{Card}(E)$....$\mathrm{Card}(F)$
2. *Si f est surjective,* $\mathrm{Card}(E)$....$\mathrm{Card}(F)$
3. *Si f est bijective,* $\mathrm{Card}(E)$....$\mathrm{Card}(F)$.

◁ **Éléments de preuve.**

Restreindre ou corestreindre de façon adéquate, de sorte à se ramener à une bijection. ▷

On en déduit notamment une caractérisation des applications bijectives entre ensembles de même cardinal :

Corollaire 5.1.16 (Caractérisation des bijections)
Soit A et B deux ensembles finis de même cardinal, et $f : A \to B$. Alors les 3 propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f *est bijective*

(ii) f *est injective*

(iii) f *est surjective*

◁ **Éléments de preuve.**
On se rend facilement compte qu'il suffit de montrer que $(ii) \iff (iii)$.
Si f est injective, remarquer que $|\mathrm{Im}(f)| = |A|$ et utiliser le cas d'égalité des cardinaux des sous-ensembles.
Si f n'est pas injective, montrer que $|\mathrm{Im}(f)| < |A|$, en construisant une surjection d'un sous-ensemble strict de A sur $\mathrm{Im}(f)$. ▷

II Combinatoire

II.1 Combinatoire des ensembles d'applications

Proposition 5.2.1 (Cardinal de l'ensemble des applications)
Soit E et F deux ensembles finis. On rappelle qu'on note F^E l'ensemble des applications de E vers F. Alors $|F^E| = |F|^{|E|}$.

◁ **Éléments de preuve.**
Une bijection $[\![1, n]\!] \to E$ définit une énumération $x_1, \dots, x_n$ des éléments de E. Remarquer que F^E est alors en bijection avec F^n, en associant à f le n-uplet $(f(x_1), \dots, f(x_n))$. ▷

Définition 5.2.2 (p-listes)
Une *p-liste* d'éléments de F (ou p-uplet) est un élément $(x_1, \dots, x_p)$ de F^p.

Une p-liste peut être vue indifféremment comme un élément d'un produit cartésien $F \times \cdots \times F$, ou de l'ensemble $F^{[\![1,p]\!]}$ des fonctions de $[\![1, p]\!]$ dans F, associant x_i à i. Ce second point de vue aura l'avantage de mieux faire comprendre certaines propriétés imposées sur une liste. Ainsi, les listes d'éléments distincts correspondent aux fonctions injectives.
Évidemment, les deux points de vue amènent de façon immédiate le dénombrement suivant :

Proposition 5.2.3 (Nombre de p-listes)
Le nombre de p-listes d'éléments de F est $|F|^p$.

Enfin, étant donné E un ensemble fini, L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ peut être mis en bijection avec l'ensemble des applications de E vers $\{0, 1\}$ *via* les fonctions indicatrices. On obtient donc :

Proposition 5.2.4 (Cardinal de l'ensemble des parties)
$|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}$.

Le résultat suivant permet de donner de la rigueur à tous les arguments combinatoires reposant sur des choix successifs :

Lemme 5.2.5 (Lemme du berger)

Soit $f : E \to F$ une application surjective. On suppose qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $y \in F$, $|f^{-1}(y)| = k$ (tous les éléments de F ont le même nombre k d'antécédents). Alors $|E| = k \cdot |F|$.

◁ **Éléments de preuve.**

Considérer la partition de E définie par cette surjection : le nombre de parts est $|F|$ et chaque part est de cardinal k. ▷

Remarque 5.2.6

- Ce lemme dit essentiellement que si tout mouton a quatre pattes, il y a quatre fois plus de pattes que de moutons (la fonction f étant ici la fonction associant à une patte donnée le mouton auquel elle est rattachée).
- Le lemme du berger permet de formaliser la notion de « choix successifs ». Il est souvent utilisé de façon implicite dans les raisonnements. Il faut essentiellement en retenir que lorsqu'on fait des choix successifs, et qu'à chaque étape, le nombre de possibilité ne dépend pas de la situation dans laquelle on se trouve (c'est-à-dire des choix précédents), alors le nombre total de possibilités s'obtient en faisant le produit du nombre de possibilités à chaque étape.
- La formalisation d'un tel choix par le lemme du berger se fait en considérant la fonction qui à un choix possible associe la situation à l'étape précédente permettant ce choix. Le calcul du nombre d'injections est un exemple typique d'utilisation du lemme du berger.
- À la longue, on ne formalisera plus complètement ce type d'arguments, et on se contentera de l'approche intuitive des choix successifs. Mais il faut bien être conscient à tout moment que cette approche intuitive peut être formalisée rigoureusement. C'est seulement lorsqu'on est pleinement conscient de la possibilité de faire cette formalisation de la sorte qu'on peut s'en dispenser.

Nous avons déjà démontré par des arguments intuitifs (choix successifs) le résultat suivant. Nous en donnons maintenant une formalisation reposant sur le lemme du berger.

Théorème 5.2.7 (Dénombrement des injections)

Soit A et B deux ensembles de cardinaux respectifs p et n. Alors, si $p \leqslant n$, le nombre d'injections de A vers B est $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$. Si $p > n$, il n'existe pas d'injection de A vers B.

◁ **Éléments de preuve.**

Se ramener au cas où $A = [\![1, p]\!]$, par commodité.

L'idée intuitive consiste à dire qu'on a n façons de choisir une valeur pour $f(1)$, puis plus que $n-1$ façons de choisir une valeur pour $f(2)$ (pour préserver l'injectivité) etc. : à chaque étape, on diminue le nombre de choix possibles.

Il s'agit donc de choix successifs : chaque étape peut se formaliser par le lemme du berger. Faire une récurrence sur p permet alors de n'avoir qu'une étape à rédiger. Appliquer le lemme du berger à l'application qui à une injection $f : [\![1, p+1]\!] \to B$ associe sa restriction à $[\![1, p]\!]$. Comment gérer le cas $p > n$? ▷

Une transcription en terme de listes donne alors :

Proposition 5.2.8 (Dénombrement des p-arrangements)
Soit F de cardinal n et $p \leqslant n$. Le nombre de p-listes d'éléments distincts de F (ou p-arrangements de F) est $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$.

En particulier, comme on le sait déjà :

Corollaire 5.2.9 (Nombre de permutations d'un ensemble)
1. *Soit E un ensemble fini. Alors $|\mathfrak{S}E| = |E|!$*
2. *En particulier, $|\mathfrak{S}_n| = n!$*

Dénombrer les surjections est un problème plus dur (lié à ce qu'on appelle les nombres de Stirling). L'exemple ci-dessous est simple, mais introduit les problèmes qu'on peut rencontrer lorsqu'on cherche à dénombrer des surjections dans des cas plus généraux.

Exemple 5.2.10
Le nombre de surjections de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n-1]\!]$ est $(n-1)!\binom{n}{2}$.

II.2 Combinatoire des sous-ensembles

Nous avons déjà défini algébriquement le coefficient binomial, et nous en avons déduit les différentes propriétés importantes, ainsi que la formule du binôme. Nous donnons dans ce chapitre un autre point de vue, partant d'une definition purement combinatoire du coefficient binomial. On se donne $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$.

Lemme 5.2.11
Soit E et F deux ensembles de même cardinal. Alors $|\mathcal{P}_k(E)| = |\mathcal{P}_k(F)|$.

◁ **Éléments de preuve.**
Une bijection $E \to F$ induit une bijection $\mathcal{P}_k(E) \to \mathcal{P}_k(F)$. ▷

Définition 5.2.12 (Coefficient binomial)
Soit $(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$. Le *coefficient binomial* $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties à k éléments d'un ensemble E de cardinal n.

Proposition 5.2.13 (Valeurs particulières de $\binom{n}{k}$)
Soit $(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$.
- *Si $n \geqslant 0$ et $k \notin [\![0,n]\!]$, $\binom{n}{k} = 0$.*
- *Si $n \geqslant 0$:*
  * $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
  * $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
  * $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

◁ **Éléments de preuve.**

- Pour le cas $n < 0$, il n'existe pas d'ensemble de cardinal négatif, donc pas non plus de sous-ensembles de cardinal k d'un tel ensemble. Si on y réfléchit, cela pose en fait un problème de logique (le « tel » se ramène à un objet qui n'existe pas), qui fait qu'en réalité, cette égalité est à prendre comme convention.
- Parmi les autres égalités, seule la dernière mérite qu'on s'y attarde. Compter d'abord les couples (a, b), avec $a \neq b$, puis utiliser le lemme du berger pour « oublier l'ordre ».

▷

L'argument ci-dessus se généralise pour obtenir l'expression algébrique du coefficient binomial qu'on vous a donnée au lycée.

Proposition 5.2.14 (Expression factorielle du coefficient binomial)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$, $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

◁ **Éléments de preuve.**
Appliquer le lemme du berger à l'application qui a un k-arrangement $(x_1, \dots, x_k)$ d'éléments de $[\![1, n]\!]$ associe le sous-ensemble $\{x_1, \dots, x_k\}$. ▷

Nous avons déjà eu l'occasion de mentionner le fait que la définition combinatoire même du coefficient binomial fournit diverses interprétations possibles en terme de dénombrement, les plus importantes étant les suivantes :

- $\binom{n}{p}$ est le nombre de mots de longueur n, constitués de p lettres a et $n-p$ lettres b.
- $\binom{n}{p}$ est le nombre de chemins de longueur n constitués de p pas vers le haut et $n-p$ pas vers la droite. Ainsi, $\binom{a+b}{a}$ est le nombre de chemins constitués de pas à droite et vers le haut, reliant $(0,0)$ à (a,b).

Proposition/Définition 5.2.15 (Extension de la définition du coefficient binomial)

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$
2. Par extension, on définit, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{N}$:
$$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}.$$
3. On pose aussi, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $k < 0$, $\binom{n}{k} = 0$. Ainsi, $\binom{n}{k}$ est défini sur $\mathbb{Z}^2$.

Cette définition permet d'obtenir de façon calculatoire les formules suivantes pour $(n, k) \in \mathbb{Z}^2$. Dans le cas où tous les paramètres sont positifs, on peut également en trouver des preuves combinatoires.

Proposition 5.2.16 (Propriétés du coefficient binomial)
Pour tout $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$. On a :

(i) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ *(symétrie)*

(ii) $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ *(formule comité-président)*

(iii) $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$ *(formule de Pascal)*

◁ **Éléments de preuve.**

Même si elles ne permettent pas de justifier correctement le cas $n < 0$, les preuves combinatoires suivantes sont à bien connaître :

(i) La complémentation définit une bijection

(ii) Compter les couples (F, x) tels que $F \in \mathcal{P}_k(n)$ et $x \in F$.

(iii) Traiter à la main le cas $n \leqslant 0$. Pour $n > 0$, trier les sous-ensembles de $[\![1, n]\!]$ suivant qu'ils contiennent ou non l'élément n.

▷

Cette dernière formule est à la base de la construction du triangle de Pascal (tableau des coefficients binomiaux), en permettant le calcul des lignes de proche en proche. Cette construction est expliquée dans la figure 5.1. Elle est très pratique pour trouver rapidement les valeurs de tous les coefficients $\binom{k}{n}$, pour n fixé de taille raisonnable (inférieur à 10). On s'en sert notamment pour trouver les coefficients de la formule du binôme décrite un peu plus loin.
Avec les définitions étendues données juste au-dessus, ces propriétés restent vraies pour $(n, k) \in \mathbb{Z}^2$. Je vous laisse vous en convaincre.

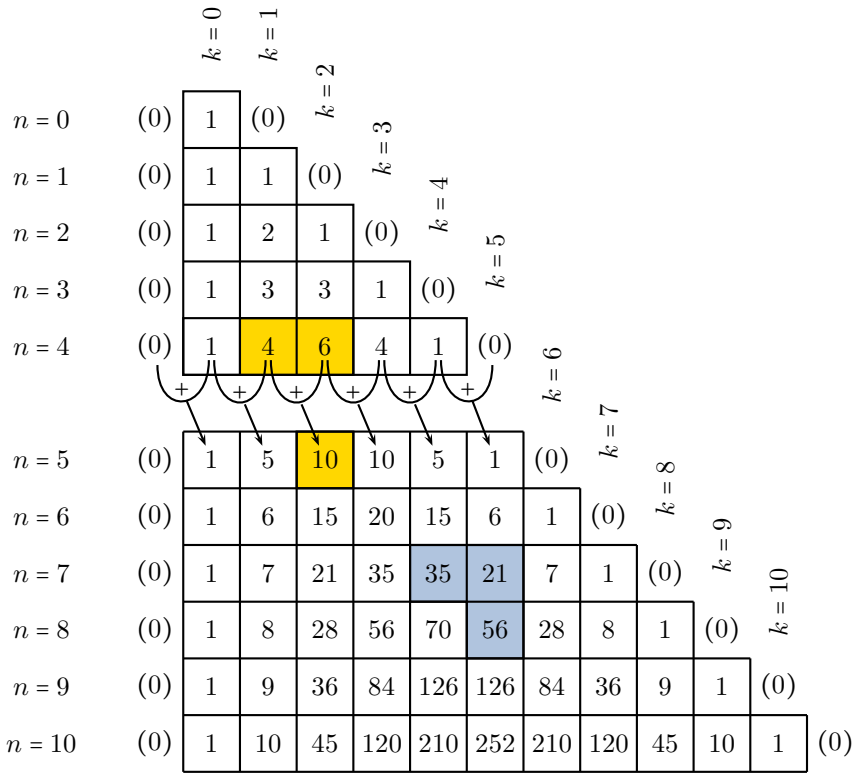


Figure 5.1 – Triangle de Pascal pour le calcul de $\binom{n}{p}$

Note Historique 5.2.17

Le triangle des coefficients binomiaux, que nous appelons communément « triangle de Pascal » était en fait connu depuis bien longtemps déjà lorsque Blaise Pascal s'y intéressa : on y trouve mention déjà chez Halayudha, mathématicien indien du 10e siècle, ainsi qu'en Chine au 13e siècle. La contribution de Pascal a essentiellement été de démontrer en 1654 un grand nombre de propriétés de ce triangle, jusque-là admises. C'est d'ailleurs à cette occasion qu'il a mis au point le principe de la démonstration par récurrence !

II.3 Formule du binôme et retour sur les sommes de puissances d'entiers

Les coefficients binomiaux permettent d'exprimer une formule d'une importance cruciale, généralisant la formule de développement d'un carré.

Théorème 5.2.18 (Formule du binôme)
Soit a et b deux nombres complexes, et $n \in \mathbb{N}$. Alors : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

◁ **Éléments de preuve.**
On donne deux démonstrations, tout aussi importantes l'une que l'autre
- Démonstration algébrique : par récurrence, en utilisant la formule de Pascal
- Démonstration combinatoire : Compter les facteurs du type $a^k b^{n-k}$ apparaissant dans le développement. Il y en a autant que de choix de k des facteurs $a+b$ contribuant à un facteur a dans le développement du produit.

▷

Nous verrons de très nombreuses utilisations de cette formule au cours de l'année. Nous en donnons une première, en revenant sur les formules de sommation des puissances d'entiers, évoquées dans le chapitre précédente. La formule du binôme permet en effet un calcul de proche en proche de ces sommes.
Notons, pour tout $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$,

$$S_n(p) = \sum_{k=1}^{n} k^p.$$

Méthode 5.2.19 (Calcul de proche en proche des $S_n(p)$)
Pour calculer $S_n(p)$ en fonction des sommes précédentes, considérer la somme :

$$S = \sum_{k=1}^{n} ((1+k)^{p+1} - k^{p+1}).$$

La somme S peut être calculée d'une part comme somme télescopique, d'autre part à l'aide du développement du binôme (ce qui fait partir les termes d'exposant $p+1$). Isoler ensuite les termes d'exposant p.

II.4 Bijection, Déesse de la Combinatoire

La bijection étant au coeur-même de la définition du cardinal, elle tient un rôle central dans un grand nombre de problèmes de dénombrement. On obtient en particulier le principe fondamental suivant :

Méthode 5.2.20 (Principe fondamental du dénombrement)
Pour montrer que deux ensembles ont même cardinal, il suffit de construire une bijection entre eux. Ainsi, pour déterminer le cardinal d'un ensemble, on le met souvent en bijection avec un ensemble « de référence » dont on connaît le cardinal.

Nous en avons déjà vu des exemples d'utilisation, par exemple la preuve de la symétrie des coefficients binomiaux. Voici quelques autres exemples, qui représentent des situations très classiques, à bien connaître :

Exemples 5.2.21
1. Dénombrer les p-listes $(k_1, \cdots, k_p)$ d'entiers strictement positifs tels que $k_1 + \cdots + k_p = n$.
2. Dénombrer les p-listes $(k_1, \cdots, k_p)$ d'entiers *positifs ou nuls* tels que $k_1 + \cdots + k_p = n$.
3. Dénombrer les p-listes strictement croissantes d'éléments de $[\![1, n]\!]$.
4. Dénombrer les p-listes croissantes d'éléments de $[\![1, n]\!]$.

II.5 Preuves combinatoires d'identités

Idée : dénombrer de deux manières différentes le même ensemble, de manière à obtenir des relations, dont certaines ne sont pas toujours évidentes à démontrer analytiquement ou algébriquement

Méthode 5.2.22 (Démonstration combinatoire d'une formule)

1. Trouver un modèle adapté à la formule, autrement dit un ensemble d'objets dont le dénombrement fournira un des membres de l'égalité. Pour cela, il est préférable de s'aider du membre le plus simple de l'égalité.
2. Dénombrer cet ensemble de deux façons différentes. Souvent, on procède d'une part à un dénombrement direct, et d'autre part à un dénombrement après avoir effectué un tri (de façon formelle, cela revient à définir une partition de l'ensemble). Le résultat d'un dénombrement par tri se traduit par une somme.
3. Évidemment, cette méthode n'est adaptée qu'à des formules portant sur des nombres entiers, si possible positifs. Il est parfois possible de se ramener à cette situation par un prétraitement de la formule à démontrer.

Proposition 5.2.23 (Quelques formules se démontrant combinatoirement)

1. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.
2. *Formule de Vandermonde :* $\sum_{k=0}^{n} \binom{N}{k}\binom{M}{n-k} = \binom{N+M}{n}$.
3. *Formule de sommation sur une colonne :* $\sum_{k=0}^{p} \binom{n+k}{n} = \binom{n+p+1}{n+1}$

◁ **Éléments de preuve.**

1. Trier les sous-ensembles de $[\![1, n]\!]$ suivant le cardinal
2. Composer des bouquets de n fleurs, disposant de 2 types de fleurs.
3. Trier les sous-ensembles à $n+1$ éléments de $[\![1, n+p+1]\!]$ suivant la valeur de leur élément maximum.

▷

Ces formules peuvent intervenir notamment dans certains calculs d'espérance ou de variance.

Méthode 5.2.24

Remarquez qu'un signe $(-1)^k$ associé à un coefficient binomial correspond souvent à une comparaison de parités de cardinaux. On peut passer d'un cardinal pair à un cardinal impair, et vice-versa, en « allumant ou éteignant » un élément fixé à l'avance, suivant qu'il est déjà ou non dans notre ensemble (plus précisément, il s'agit de l'opération $X \mapsto X \triangle \{x\}$).
Nous appelerons cela le principe de l'interrupteur.

Exemple 5.2.25

- Démonstration combinatoire de la formule $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \delta_{n,0}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- À l'aide de la formule précédente, compléter la deuxième preuve de la formule du crible.

III Introduction à la dénombrabilité (Spé)

Tout ce paragraphe est du ressort du programme de Spé. On utilisera dans ce paragraphe l'existence du minimum d'une partie non vide de $\mathbb{N}$ (ce qui est un axiome de la construction de $\mathbb{N}$; nous en reparlerons dans un chapitre ultérieur)

Définition 5.3.1 (Dénombrabilité)

Un ensemble E est *dénombrable* s'il peut être mis en bijection avec $\mathbb{N}$. On dit qu'il est au plus dénombrable s'il est fini ou dénombrable.

Lemme 5.3.2

Un sous-ensemble E non fini de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

◁ **Éléments de preuve.**

Construire par récurrence une application injective de $[\![0, n]\!]$ dans E, en rajoutant à chaque étape le minimum des éléments non encore utilisés. Cela définit une bijection $\mathbb{N} \to E$. ▷

Ainsi, tout sous-ensemble de $\mathbb{N}$ est au plus dénombrable.

Lemme 5.3.3 (Caractérisation des ensembles au plus dénombrables)

Soit E un ensemble non vide. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) E est au plus dénombrable

(ii) il existe une fonction injective $f : E \longrightarrow \mathbb{N}$.

(iii) il existe une fonction surjective $f : \mathbb{N} \longrightarrow E$.

◁ **Éléments de preuve.**

- $(i) \Longrightarrow (ii)$: considérer une bijection $E \to F \subset \mathbb{N}$, et composer par l'injection canonique.
- $(ii) \Longrightarrow (iii)$: c'est l'inversibilité à gauche d'une injection
- $(iii) \Longrightarrow (ii)$: c'est l'inversibilité à droite d'une surjection. Pourquoi l'axiome du choix n'est-il pas nécessaire ici ?
- $(ii) \Longrightarrow (i)$: corestriction à l'image.

▷

Nous utilisons le fait, déjà démontré en exercice, que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable (*via* la numérotation en diagonale).

Proposition 5.3.4 (Construction d'ensembles dénombrables)

1. *Si E et F sont au plus dénombrables, alors $E \times F$ est au plus dénombrable.*
2. *Plus généralement, un produit $E_1 \times \cdots \times E_n$ d'un nombre fini d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable. Si l'un d'eux est dénombrable et les autres non vides, alors le produit est dénombrable.*
3. *Une union d'un nombre au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable. Si l'un des ensembles est dénombrable, l'union est dénombrable.*

◁ **Éléments de preuve.**

1. Construire une surjection par composition : $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to E \times F$
2. Récurrence

3. Supposons les ensembles indexés sur I dénombrable. Construire une surjection

$$\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to I \times \mathbb{N} \to \bigcup_{i \in I} A_i.$$

▷

Corollaire 5.3.5

1. *L'ensemble $\mathbb{Z}$ est dénombrable.*
2. *L'ensemble $\mathbb{N}^p$ est dénombrable.*
3. *L'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels est dénombrable.*
4. *L'ensemble $\mathbb{Z}[x]$ des fonctions polynomiales à coefficients entiers est dénombrable.*

Il existe des ensembles infinis non dénombrables. Par exemple :

Théorème 5.3.6

L'ensemble des réels $\mathbb{R}$ est non dénombrable.

◁ **Éléments de preuve.**

Sinon, considérer une énumération $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de tous les réels, et considérer un y tel que le n-ième chiffre après la virgule de y soit distinct de 0, 9 et du n-ième chiffre de x_n. Le réel y peut-il être dans l'énumération ? Pourquoi prendre la précaution de prendre les chiffres distincts de 0 et 9 ? Cette construction est-elle dépendante de l'axiome du choix ? ▷

Pour la culture, nous terminons cette étude par un théorème de Cantor, affirmant notamment qu'étant donné un ensemble, il existe toujours un ensemble de cardinal plus gros. En particulier, il existe une infinité de cardinaux infinis différents.

Définition 5.3.7

On dit que $\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(F)$ si et seulement s'il existe une injection de E dans F, et $\mathrm{Card}(E) < \mathrm{Card}(F)$ si et seulement si $\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(F)$ et $\mathrm{Card}(E) \neq \mathrm{Card}(F)$.

Théorème 5.3.8 (Cantor, 1891, HP)

Pour tout ensemble X, on a $\mathrm{Card}(X) < \mathrm{Card}(\mathcal{P}(X))$.

◁ **Éléments de preuve.**

S'il existe une surjection $f : X \to \mathcal{P}(X)$, considérer $Y \subset X$ constitué des éléments x tels que $x \notin f(x)$, et obtenir une contradiction en considérant l'appartenance de c à Y, c étant un élément de X tel que $f(c) = Y$. ▷

Comme on l'a signalé plus haut, ce résultat entre en contradiction avec l'existence de l'ensemble des ensembles.

6 Nombres réels

Au fond, en mathématiques, tout sort de l'itération obstinée et stupide de l'opérateur $n \mapsto n+1$ (addition de 1)

(René Thom)

Pour moi, la mathématique, c'est la conquête du continu par le discret.

(René Thom)

Introduction

Le but de ce chapitre est d'évoquer rapidement les définitions des différents types de nombre classiques : entiers naturels, entiers relatifs, nombres rationnels, pour parvenir finalement aux nombres réels, dont nous étudierons un peu plus longuement les propriétés. Le but n'est pas de faire une construction rigoureuse et exhaustive qui est complètement hors-programme, mais de donner un aperçu des techniques utilisées en vue de mieux comprendre l'origine des propriétés les plus importantes de ces nombres, des opérations qui y sont définies, ainsi que de la relation d'ordre usuelle.

I Un mot sur $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

I.1 Les entiers naturels

L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels est défini par induction structurelle à partir d'un objet initial 0 et de la relation de successeur : n étant construit, on défini un *nouvel* objet $n+1$ appelé successeur de n.
Le principe-même de la définition par induction structurelle affirme que tout entier naturel $\mathbb{N}$ peut alors être atteint à partir de 0 en itérant un nombre fini de fois la construction de prise de successeur. Cela se traduit par la proposition suivante, qui résulte donc de la définition-même de $\mathbb{N}$, et qui pour cette raison est souvent pris comme axiome de la construction de $\mathbb{N}$:

Proposition 6.1.1 (Axiome de récurrence)
Soit $\mathcal{P}$ une propriété définie sur $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$(\mathcal{P}(0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N},\ \ (\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)))) \Longrightarrow (\forall n \in \mathbb{N},\ \ \mathcal{P}(n)).$$

◁ **Éléments de preuve.**
Par définition par induction structurelle, $\mathbb{N}$ ne peut pas conntenir de sous-ensemble strict contenant 0 et stable par prise de successeur. Or, le sous-ensemble de $\mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vrai vérifie cette propriété. ▷

On admet qu'on définit une relation d'ordre total sur $\mathbb{N}$ en définissant $n \leqslant m$ ssi on peut passer de n à m en itérant un nombre fini de fois (éventuellement nul) la prise de successeur. Il s'agit de la relation d'ordre usuelle que vous connaissez bien.
Une propriété importante de $\mathbb{N}$, qui pourrait également être prise en axiome (du fait qu'elle est équivalente à l'axiome de récurrence) est très justement appelée propriété fondamentale de $\mathbb{N}$:

Théorème 6.1.2 (propriété fondamentale de $\mathbb{N}$)
Tout sous-ensemble non vide et majoré de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

◁ **Éléments de preuve.**
On le montre par récurrence sur n, pour les sous-ensembles majorés par n, en discutant suivant que E, majoré par n, contient n ou non. ▷

Corollaire 6.1.3
Tout sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

◁ **Éléments de preuve.**
Appliquer la propriété fondamentale à l'ensemble des minorants. ▷

En fait, la terminologie « propriété fondamentale » n'est pas anodine. On aurait pu construire une axiomatique de $\mathbb{N}$ basée sur ce théorème (qui fonderait donc l'ensemble $\mathbb{N}$) plutôt que sur l'axiome de récurrence. C'est ce que montre le théorème suivant :

Théorème 6.1.4
La propriété fondamentale de $\mathbb{N}$ est équivalente à l'axiome de récurrence.

◁ **Éléments de preuve.**
Pour démontrer que la propriété fondamentale entraîne l'axiome de récurrence, considérer le minimum de $E = \{n \mid \neg\mathcal{P}(n)\}$ et son prédecesseur. ▷

Les différentes opérations sur $\mathbb{N}$ se définissent par récurrence (ce qui équivaut à les définir avec les successeurs) :

- $a + b$ est définie par récurrence sur b, par $a + 0 = a$ et $a + (b + 1) = (a + b) + 1$ ($+1$ désignant le successeur). Autrement dit, $a + b$ est l'entier obtenu en itérant b fois la prise de sucesseur à partir de a.
- $a \times b$ est définie par récurrence sur b par $a \times 0 = 0$ et $a \times (b+1) = (a \times b) + a$. Autrement dit, il s'agit de la somme de b termes égaux à a.

On résume ici les propriétés de ces opérations, que vous connaissez depuis longtemps.

Proposition 6.1.5 (propriétés de l'addition et du produit d'entiers)
Soit a, b et c des éléments de $\mathbb{N}$:

- $a + 0 = a$ *(0 est élément neutre pour $+$)*
- $0 + a = a$ *(0 est élément neutre pour $+$)*
- $a \times 0 = 0 \times a = 0$ *(0 est absorbant pour $\times$)*
- $a + 1 = 1 + a$
- $a \times 1 = 1 \times a = a$ *(1 est neutre pour $\times$)*
- $(a + b) + c = a + (b + c)$ *($+$ est associative)*
- $a + b = b + a$ *($+$ est commutative)*

- $a \times (b+c) = a \times b + a \times c$ *(× est distributive sur +)*
- $a \times b = b \times a$ *(× est commutative)*
- $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ *(× est associative)*
- $ab = 0 \Longrightarrow a = 0$ *ou* $b = 0$ *(intégrité de* $(\mathbb{N}, \times)$*)*
- $a + b = 0 \Longrightarrow a = 0$ *et* $b = 0$
- $a + b = a + c \Longrightarrow b = c$ *(régularité pour +)*
- *Si* $a \neq 0$, $ab = ac \Longrightarrow b = c$ *(régularité pour ×)*

◁ **Éléments de preuve.**

On admet ces propriétés élémentaires, qui peuvent se démontrer par récurrence sur l'une des variables, à partir de la définition itérative des lois. Ce sont des preuves sans difficulté, mais longues et fastidieuses. ▷

I.2 Les entiers relatifs

Grossièrement, il s'agit de symétriser les éléments de $\mathbb{N}$: tout élément non nul n de $\mathbb{N}$ définit un élément $-n$ appelé opposé de $\mathbb{N}$. On étend la notion de successeur en disant que 0 est successeur de -1 et si n est non nul $-n$ est sucesseur de $-(n+1)$. Autrement dit, $-(n+1)+1 = -n$.
On a vu en TD qu'on peut définir $\mathbb{Z}$ plus formellement comme quotient de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ par la relation $(x+n, y+n) \sim (x, y)$. Le couple (x, y) définit alors l'entier $x - y$. Par exemple, $n \in \mathbb{N}$ est représenté par $(n, 0)$ et $-n$ est représenté par $(0, n)$.
On admet que les opérations + et × définies sur $\mathbb{N}$ se prolongent à $\mathbb{Z}$ (on peut les définir sur la représentation sous forme de couples), et vérifient toujours les propriétés d'associativité, de commutativité et de distributivité dont elles jouissaient dans $\mathbb{N}$. De plus, on dispose d'un neutre additif 0 et d'un neutre multiplicatif 1, et tout élément admet un opposé. Toutes ces propriétés se résument en disant que $\mathbb{Z}$ est un anneau commutatif (la commutativité se référant ici à celle de ×, puisque celle de + est imposée par la définition d'un anneau quelconque).
bte

II Nombres rationnels

II.1 Construction de $\mathbb{Q}$

Nous avons déjà évoqué dans un chapitre antérieur une façon de construire $\mathbb{Q}$ comme ensemble des quotients $\frac{a}{b}$ de deux entiers relatifs. Plus précisément, pour définir correctement les cas d'égalités entre fraction, il convient de définir $\mathbb{Q}$ comme l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ muni de la relation $\equiv_{\mathbb{Q}}$ définie par :

$$(a, b) \equiv (c, d) \qquad \Longleftrightarrow \qquad ad - bc = 0.$$

En d'autres termes, $\mathbb{Q}$ est l'espace quotient de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ par la relation $\equiv_{\mathbb{Q}}$. L'entier relatif $n \in \mathbb{Z}$ peut alors être identifié au couple $(n, 1)$, ce qui permet de considérer que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Définition 6.2.1 (Notation usuelle pour un rationnel)
La classe $\overline{(a, b)}$ du couple (a, b) est notée $\frac{a}{b}$.

La définition de la relation donne les conditions d'égalité de deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$. C'est ce passage au quotient quotient qui permet de gérer de façon rigoureuse la non unicité de l'écriture d'un rationnel sous forme d'un couple (numérateur, dénominateur).

Théorème 6.2.2 (Définition de l'addition et du produit de rationnels)
Les lois définies sur $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ par $(a,b)+(c,d) = (ad+bc,bd)$ et $(a,b)\times(c,d) = (ac,bd)$ passent au quotient, définissant sur $\mathbb{Q}$ les lois pouvant être décrites avec les notations usuelles par :

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd} \qquad et \qquad \frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

◁ **Éléments de preuve.**
En vertu des résultats du chapitre précédent, il suffit de vérifier que les lois définies sur $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ sont des congruences, ce qui ne pose pas de problème majeur. ▷

Théorème 6.2.3 (Propriété des lois de $\mathbb{Q}$)

- *Les lois $+$ et $\times$ sont associatives (i.e. $(x+y)+z = x+(x+z)$ et de même pour $\times$)*
- *Les lois $+$ et $\times$ sont commutatives (i.e. $x+y = y+x$ et de même pour $\times$)*
- *La loi $\times$ est distributive sur $+$ (i.e. $x\times(y+z) = x\times y + x\times z$)*
- *L'élément $0 = \frac{0}{1}$ est neutre pour $+$, et tout élément $\frac{a}{b}$ admet un opposé $\frac{-a}{b}$*
- *Le rationnel $\frac{a}{b}$ est égal à 0 si et seulement si $a = 0$.*
- *L'élément $1 = \frac{1}{1}$ est neutre pour $\times$, et tout élément $\frac{a}{b}$ non nul est inversible, d'inverse $\frac{b}{a}$.*

Ces propriétés font de $\mathbb{Q}$ un corps.

On dit que $\mathbb{Q}$ est le corps des fractions de l'anneau (intègre) $\mathbb{Z}$. L'intégrité de $\mathbb{Z}$ est une propriété stipulant que pour tout $(a,b)\in(\mathbb{Z}^*)^2$, $ab\neq 0$. Cette propriété a été utilisée pour justifier l'inversibilité des rationnels non nuls.

La construction que nous venons de faire peut être faite à partir de n'importe quel anneau intègre, et permet de définir le corps des fractions de cet anneau. Nous retrouverons cette construction lorsque nous construirons les fractions rationnelles formelles à partir des polynômes formels. Nous n'expliciterons plus à ce moment les détails de la construction, du fait que tout se passe très précisément comme dans la situation ci-dessus.

II.2 Relation d'ordre dans $\mathbb{Q}$

Lemme 6.2.4
Soit $q = \frac{a}{b}$ et $r = \frac{c}{d}$, où les dénominateurs b et c. Alors le signe de $ad-bc$ est indépendant des représentations de q et r choisies (à dénominateur positif).

Définition 6.2.5 (Relation d'ordre sur $\mathbb{Q}$)
Avec les notations et hypothèses du lemme, $q\leqslant r$ si et seulement si $ad-bc\leqslant 0$.

Proposition 6.2.6
La relation $\leqslant$ ainsi définie est une relation d'ordre total sur $\mathbb{Q}$.

III Nombres réels

III.1 De l'existence de nombres non rationnels

Note Historique 6.3.1

On connaît l'existence des nombres irrationnels depuis l'antiquité. Ce sont les mathématiciens grecs qui, en premier, en ont été conscients, *via* l'étude de la diagonale du carré, et peut-être même avant cela, de la diagonale du pentagone.
Les nombres étant défini comme des longueurs, ils parlent de longueurs *incommensurables* (elles ne peuvent pas se mesurer à l'aide d'une unité commune).

Dans ce qui suit, on adopte la compréhension intuitive de $\mathbb{R}^*$ comme mesure de longueurs.

Définition 6.3.2 (Nombres incommensurables)

Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2$. On dit que x et y sont incommensurables si $\frac{x}{y}$ est irrationnel.

En admettant provisoirement l'existence et l'unicité de la décomposition d'un entier strictement positif en produit de facteurs premiers, on montre :

Proposition 6.3.3 (Existence de nombres irrationnels)

Si n n'est pas un carré parfait (donc si n ne s'écrit pas sous la forme $n = m^2$ pour un certain entier m), alors $\sqrt{n}$ est irrationnel.

◁ **Éléments de preuve.**

C'est une adaptation de la démonstration de l'irrationnalité de $\sqrt{2}$, en remarquant que par hypothèse, l'un des facteurs premiers de la décomposition primaire de n est de multiplicité impaire. ▷

Remarque 6.3.4

Au sens de la mesure des longueurs, les quantités $\sqrt{n}$ existent bien, comme longueurs des différents rayons de l'escargot de Pythagore (ou spirale de Théodore)

III.2 L'ensemble ordonné $\mathbb{R}$

L'ensemble $\mathbb{R}$ est alors obtenu en « bouchant les trous » laissés par les éléments de $\mathbb{Q}$, un peu comme on coulerait du mortier pour celler un ensemble de petites pierres, ou comme le bitume autour des gravillons. La façon de percevoir les trous de $\mathbb{Q}$ est d'étudier l'exemple suivant :

Exemple 6.3.5 (un sous-ensemble borné de $\mathbb{Q}$ n'admettant pas de borne supérieure)

Soit $E = \{x \in \mathbb{Q}_+ \mid x^2 \leqslant 2.\}$. Alors E est borné, et n'admet pas dans $\mathbb{Q}$ de borne supérieure.

Si on se rapproche de plus en plus du bord de cet intervalle, on tombe dans un trou... il n'y a rien au bord !
C'est ce vide que l'on comble en construisant $\mathbb{R}$ comme l'ensemble $\mathbb{Q}$, complété des bornes supérieures de tous les sous-ensembles non vides bornés. Là encore, on a besoin de le faire sous forme d'un quotient pour une certaine relation d'équivalence, donnant une condition pour que deux bornes supérieures soit égales. Cette construction, qui n'est pas au programme, se résume par la propriété fondamentale de $\mathbb{R}$, *fondamentale* dans le sens où elle est intrinsèque à la définition de $\mathbb{R}$. Cette propriété ne pouvant être justifiée que par la manière rigoureuse de construire $\mathbb{R}$, nous l'admettrons.
Ainsi, on prolonge l'ensemble ordonné $(\mathbb{Q}, +)$ en un ensemble ordonné $(\mathbb{R}, +)$ le plus petit possible, assurant l'existence des bornes supérieures. Remarquez que cette « définition » très vague englobe aussi la définition

de la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$, prolongeant celle de $\mathbb{Q}$. Cette relation est totale. On admet également la possibilité de prolonger l'addition et le produit à $\mathbb{R}$, ainsi que la différence.
Ainsi, par construction même (c'est notre cahier des charges) :

Axiome 6.3.6 (Propriété fondamentale de $\mathbb{R}$)
Soit E un sous-ensemble non vide et majoré de $\mathbb{R}$. Alors E admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

Évidemment, on en a une version équivalente pour la borne inférieure :

Théorème 6.3.7 (Propriété fondamentale de $\mathbb{R}$, exprimée avec la borne inférieure)
Soit E un sous-ensemble non vide et minorée de $\mathbb{R}$. Alors E admet une borne inférieure dans $\mathbb{R}$.

◁ **Éléments de preuve.**
Appliquer la propriété fondamentale à l'ensemble des minorants, puis montrer que la borne supérieure de cet ensemble est encore un minorant. ▷

Une variante consiste à appliquer la propriété fondamentale à $-E$.

Note Historique 6.3.8
La propriété de la borne supérieure a été énoncée (et démontrée, mais avec une erreur due à une absence de définition correcte de $\mathbb{R}$) en 1817 par le mathématicien tchèque d'origine italienne Bernhard Bolzano, en vue de donner une démonstration rigoureuse du théorème des valeurs intermédiaires (aussi appelé théorème de Bolzano), jusque-là démontré par un dessin (Cauchy, auteur de ce théorème se contente d'un dessin comme preuve)

III.3 Valeurs absolues et parties positives, négatives

Définition 6.3.9 (Valeur absolue)
Soit $x \in \mathbb{R}$ La valeur absolue de x, notée $|x|$, est le réel obtenu de x en changeant si besoin son signe de sorte à obtenir une quantité positive :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Remarque 6.3.10
La valeur absolue est souvent utilisée lorsqu'on veut montrer qu'une quantité reste bornée, c'est-à-dire peut être à la fois majorée et minorée. En effet, majorer $|A|$ revient à majorer et minorer A, puisque $|A| \leqslant B$ équivaut à $-B \leqslant A \leqslant B$.
Ainsi, la valeur absolue est très efficace dès lors qu'on veut obtenir un encadrement symétrique d'une expression, ou plus généralement, un encadrement (après avoir centré en retranchant le milieu). Cela permet, avec un peu d'habitude et de technique, de ramener la preuve de 2 inégalité à celle d'une seule. Ainsi, ne fuyez pas les valeurs absolues en les réécrivant systématiquement sous forme d'un encadrement, AU CONTRAIRE !

La valeur absolue peut s'exprimer à l'aide des parties positive et négative.

Définition 6.3.11 (Partie positive, partie négative d'un réel)

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- On appelle *partie positive* de x, et on note x^+, le réel défini par :

$$x^+ = \max(0,x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- On appelle *partie négative* de x, et on note x^-, le réel défini par :

$$x^- = -\min(0,x) = \max(0,-x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Propriétés 6.3.12 (Propriétés des parties positives et négatives)

Soit x un réel. Alors :

(i) $x^+ \geqslant 0$ *et* $x^- \geqslant 0$;

(ii) $x^+ = 0$ *ou* $x^- = 0$;

(iii) $x = x^+ - x^-$;

(iv) $|x| = x^+ + x^-$.

◁ **Éléments de preuve.**
Les points (i), (ii) découlent de la définition, les autres s'obtiennent par discussion sur le signe de x.
▷

III.4 Rappels sur les opérations et les inégalités

Nous admettons la possibilité de prolonger les opérations + et × de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$. Nous admettons que ces lois munissent $\mathbb{R}$ d'une structure d'anneau commutatif (cf I-2 : les deux lois sont associatives, commutatives, admettent un élément neutre, on a l'existence des opposés pour + et × est distributive sur +). On admet également l'intégrité, à savoir le fait que $ab = 0$ implique $a = 0$ ou $b = 0$.
Il est indispensable de bien savoir manipuler les inégalités. En effet, l'analyse peut se définir comme l'étude d'approximations infinitésimales, ces approximations s'obtenant souvent par majorations et minorations. Le caractère infinitésimal se traduit par le fait qu'on s'autorise une marge d'erreur ε, mais que ε peut devenir aussi petit qu'on veut.

Remarquons que la définition de $\mathbb{R}$ par la propriété fondamentale nécessite implicitement la définition de la relation d'ordre $\leqslant$, venant donc de la construction choisie de $\mathbb{R}$. Nous aurons l'occasion d'évoquer différentes constructions possibles plus tard. Pour le moment, nous admettons l'existence de cette relation d'ordre. La donnée de la relation d'ordre nous permet de définit $\mathbb{R}_-$ et $\mathbb{R}_+$ par comparaison à 0, ainsi que $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$. Nous admettons les points suivants :

Propriété 6.3.13

La relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ vérifie les 4 propriétés élémentaires suivants :

(i) C'est une relation d'ordre totale

(ii) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \leqslant y \iff y - x \in \mathbb{R}_+$

(iii) $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad x + y \geqslant 0$ *avec égalité ssi* $x = y = 0$

(iv) $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad xy \geqslant 0$.

De la dernière propriété et du fait que par la propriété (ii), $x \leqslant 0$ équivaut à $(-x) \geqslant 0$, on déduit la règle des signes pour un produit :

Corollaire 6.3.14 (Règle des signes)

Soit x, y deux réels.

(i) Si $x \geqslant 0$ et $y \leqslant 0$ ou si $x \leqslant 0$ et $y \geqslant 0$, alors $xy \leqslant 0$

(ii) Si $x \leqslant 0$ et $y \leqslant 0$, alors $xy \geqslant 0$

On rappelle enfin sans preuve toutes les propriétés classiques découlant de celles qui précèdent. Les preuves sont laissées en exercice, et s'obtienne le plus souvent en revenant à la propriété (ii) caractérisant une inégalité.

Proposition 6.3.15 (Manipulations élémentaires d'inégalités)

Soit a, b, c et b des réels.

(i) Si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$, alors $a + c \leqslant b + d$, avec égalité ssi $a = b$ et $c = d$.

(ii) Si $a \leqslant b$ alors $-b \leqslant -a$.

(iii) Si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$, alors $a - d \leqslant b - c$

(iv) Si $a \geqslant 0$ et $c \leqslant d$, alors $ac \leqslant ad$.

(v) Si $a \leqslant 0$ et $c \leqslant d$, alors $ac \geqslant ad$.

(vi) Si $0 < a \leqslant b$ et $0 < c \leqslant d$, alors $0 < ac \leqslant bd$, avec égalité si et seulement si $a = b$ et $c = d$.
L'inégalité reste vraie pour des valeurs positives ou nulles, mais on perd alors le cas d'égalité.

(vii) Pour toutes les autres situations de produit d'inégalité, raisonner d'abord sur la valeur absolue, puis ajouter le signe.

Évidemment, certaines de ces propriétés se généralisent de façon immédiate à un plus grand nombre de termes. Par exemple, si $(a_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et $(b_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ vérifie $a_i \leqslant b_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a alors $\sum_{i=1}^{n} a_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} b_i$, avec égalité si et seulement si $a_i = b_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

L'obtention d'inégalités (par exemple la majoration d'une quantité pour contrôler son ordre de grandeur, souvent dans des études de convergence) est essentielle en analyse. Nous indiquons quelques démarches possibles pour obtenir de telles inégalités. Ces méthodes seront largement développées ultérieurement.

Terminologie 6.3.16

On rappelle que « majorer » une quantité A, c'est trouver B tel que $A \leqslant B$, « minorer » une quantité A, c'est trouver B tel que $A \geqslant B$. Souvent, A dépend d'un certain nombre de paramètres ou variables, et on cherche un majorant B ne dépendant plus de certains de ces paramètres (il arrivera fréquemment que B continue de dépendre de certains paramètres, mais pas de tous).

Méthode 6.3.17 (Majorer, minorer)

Pour obtenir des inégalités, on peut :

- tout passer du même côté (si l'inégalité est donnée) et essayer de factoriser pour déterminer le signe.
  Exemple : $xy \leqslant \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$;
- procéder par étude de fonction, si l'inégalité est donnée : on passe tout du même côté, et on étudie le signe de la fonction obtenue, grâce à une étude de variations.
  Exemple : pour tout $x \geqslant 0$, $\ln(1 + x) \geqslant x - \frac{x^2}{2}$;

- utiliser une propriété de convexité ou de concavité : une fonction dérivable f est convexe si f' est croissante (donc la pente est de plus en plus forte). Intuitivement, la convexité se traduit par le fait que les tangentes sont sous la courbe, et les cordes sont au-dessus de la courbe.
  Exemples : $e^x \geqslant 1+x$, $\ln(1+x) \leqslant x$, $\sin(x) \leqslant x$ pour $x \geqslant 0$, $\sin(x) \geqslant \frac{2}{\pi}x$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$;
- Utiliser des inégalités classiques (en premier lieu l'inégalité triangulaire, l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'inégalité arithmético-géométrique...). L'inégalité triangulaire est à utiliser dès lors qu'on cherche à majorer la valeur absolue (ou le module) d'une somme dont on sait majorer la valeur absolue de chaque terme : il faut d'abord sortir ces termes de la valeur absolue globale, et ce grâce à l'inégalité triangulaire.

Le but de la fin de ce paragraphe est justement l'étude des plus importantes de ces inégalités classiques. L'un des outils essentiels pour majorer une valeur absolue est l'inégalité triangulaire :

Théorème 6.3.18 (Inégalité triangulaire)

Soit a et b deux réels. Alors :

1. $|a+b| \leqslant |a| + |b|$ *(inégalité triangulaire), avec égalité ssi a et b sont de même signe*
2. $|a+b| \geqslant ||a| - |b||$ *(deuxième inégalité triangulaire).*

◁ **Éléments de preuve.**

1. Élever au carré
2. Utiliser l'IT pour $(a+b)+(-b)$.

▷

Remarque 6.3.19

Du fait que $|b| = |-b|$, on a les variantes suivantes des deux inégalités triangulaires :

$$||a| - |b|| \leqslant |a-b| \leqslant |a| + |b|.$$

Corollaire 6.3.20 (Inégalité triangulaire pour les sommes)

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille finie de réels. Alors

$$\left|\sum_{i\in I} a_i\right| \leqslant \sum_{i\in I} |a_i|.$$

Théorème 6.3.21 (Inégalité de Cauchy-Schwarz numérique)

Soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ des réels. On a alors :

$$\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right|^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right),$$

avec égalité si et seulement si les vecteurs $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ sont colinéaires.

En notant, pour $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)$

$$\langle X, Y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, et

$$\|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{\langle X, X\rangle}$$

la norme euclidienne canonique, l'inégalité de Cauchy-Schwarz se réexprime de la sorte :

$$|\langle X, Y\rangle| \leqslant \|X\| \cdot \|Y\|.$$

◁ **Éléments de preuve.**
Utiliser le fait que le polynôme $\|\lambda X + Y\|^2$ en la variable λ est de signe constant : que peut-on en déduire sur son discriminant ? (Attention, ne pas oublier de traiter le cas où le polynôme n'est pas de degré 2)
Pour le cas d'égalité, cela correspond à $\Delta = 0$: qu'est-ce que ça signifie pour le polynôme ci-dessus ? ▷

Remarque 6.3.22

La démonstration n'utilise que le fait que pour tout X, $\langle X, X\rangle \geqslant 0$, avec égalité ssi $X = 0$, et la symétrie du produit scalaire. On définira plus tard dans l'année une notion générale de produit scalaire, vérifiant ces propriétés. Ainsi, la formule de Cauchy-Schwarz restera valable pour tout produit scalaire, la norme associée à ce produit scalaire se définissant comme on l'a fait pour la norme euclidienne à partir du produit scalaire canonique.

Théorème 6.3.23 (Inégalité arithmético-géométrique, HP)

Pour tout $X = (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$,

$$\frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n) \geqslant \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}.$$

Cette inégalité dit qu'on est gentil avec vous en calculant votre moyenne scolaire avec la moyenne arithmétique plutôt que la moyenne géométrique.

◁ **Éléments de preuve.**
Récurrence un peu atypique avec des retours en arrière : on montre d'abord par récurrence le cas où n est une puissance de 2, puis en regroupant judicieusement des termes, on montre la propriété pour n quelconque en redescendant à partir des puissances de 2. C'est la démonstration de Cauchy. Il existe beaucoup d'autres démonstrations, notamment une démonstration très rapide par un argument de convexité, mais cela nécessite quelques connaissances supplémentaires qu'on verra plus tard. ▷

III.5 Division euclidienne dans $\mathbb{R}$

Le principe de la division euclidienne dans $\mathbb{R}$ repose sur le résultat suivant, bien utile par ailleurs, notamment pour prouver des propriétés de densité :

Proposition 6.3.24 (Propriété d'Archimède)

Soit x et y deux réels strictement positifs. Il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $x < ny$.

◁ **Éléments de preuve.**
Par l'absurde, appliquer la propriété fondamentale de $\mathbb{R}$ à $\{ny,\ n \in \mathbb{N}\}$, et considérer n_0 tel que $n_0 y$ soit proche de la borne supérieure. Trouver une contradiction en considérant $(n_0 + 1)y$. ▷

Remarque 6.3.25

La propriété d'Archimède peut se reformuler en disant que pour tout $y > 0$, la suite $(ny)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Corollaire 6.3.26

Pour tout $x > 0$ et tout $y > 0$, il existe un rationnel r tel que $0 < rx < y$.

◁ **Éléments de preuve.**

Appliquer la propriété d'Archimède, puis multiplier par $\frac{1}{n}$. ▷

En particulier, en prenant $x = 1$, on peut toujours trouver un rationnel strictement positif inférieur à un réel strictement positif y arbitraire.
Une conséquence importante de ce résultat est l'inversibilité de tout réel non nul :
Une variante de la propriété d'Archimède est :

Corollaire 6.3.27

Soit x et y strictement positifs. Il existe un unique entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $ny \leqslant x < (n+1)y$. Il existe également un unique entier n' tel que $n'y < x \leqslant (n'+1)y$. Sauf lorsque $\frac{x}{y}$ est entier, $n = n'$. Le résultat se généralise à x négatif.

◁ **Éléments de preuve.**

Considérer n minimal tel que $x < (n+1)y$. Pour le deuxième point, discuter suivant que x est un multiple de y ou non. Pour x négatif, appliquer ce qui précède à $-x$. L'unicité provient du fait que les intervalles définis par les ny sont disjoints. ▷

Ce résultat se réexprime sous la forme familière suivante :

Théorème 6.3.28 (Division euclidienne, Euclide)

1. *Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe un unique entier n et un unique réel $r \in [0, y[$ tels que $x = ny + r$.*
2. *Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^*$. Il existe un unique entier n et un unique réel $r \in [0, |y|[$ tels que $x = ny + r$.*

C'est un résultat très concret : si un menuisier doit couper des planches de longueur donnée y dans une grande planche de longueur x, n est le nombre de planches de la bonne longueur qu'il peut obtenir, et r est la longueur du bout inutile qu'il lui reste à la fin, donc la chute.

Note Historique 6.3.29

Archimède est légèrement postérieur à Euclide (3e siècle avant J.-C.). La propriété d'Archimède figure en fait déjà dans les *Éléments* d'Euclide. Archimède utilise largement cette propriété, sans pour autant prétendre à sa paternité.

III.6 Densité de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

On peut alors se demander s'il y a beaucoup de nombres irrationnels, et comment ils se répartissent entre les nombres rationnels pour former $\mathbb{R}$. Un élément de réponse est apporté par la propriété de densité, affirmant qu'il y a des rationnels et des irrationnels un peu partout dans $\mathbb{R}$: il n'existe pas dans $\mathbb{R}$ d'intervalle non vide ou non réduit à un singleton, aussi petit soit-il, ne possédant ni rationnel ni irrationnel. Intuitivement, si ce n'était pas le cas, tous les réels à l'intérieur d'un intervalle ne contenant pas

de rationnels ne seraient d'aucune utilité pour exprimer des bornes supérieures d'ensembles de rationnels, car trop éloignés des rationnels les plus proches. Notre construction de $\mathbb{R}$ ne serait alors pas minimale. Commençons par définir rigoureusement la propriété de densité dans $\mathbb{R}$.

Définition 6.3.30 (Densité dans $\mathbb{R}$)
Un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$, il existe $z \in E$ tel que $x < z < y$.

Autrement dit, entre deux éléments quelconques de $\mathbb{R}$ (aussi proches soient-ils), il existe toujours un élément de E : les éléments de E vont s'infiltrer un peu partout.
Cette notion de densité se généralise à d'autres ensembles que $\mathbb{R}$, mais d'un point de vue topologique.

Théorème 6.3.31 (Densité des rationnels et des irrationnels dans $\mathbb{R}$)
Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

◁ **Éléments de preuve.**
- $\mathbb{Q}$: Appliquer la propriété d'Archimède avec un rationnel r inférieur à $y - x$.
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: Se ramener à la densité de $\mathbb{Q}$ en translatant d'un irrationnel (par exemple $\sqrt{2}$)

▷

Bref, il existe beaucoup de nombres irrationnels. Et en fait beaucoup plus que des rationnels. En effet $\mathbb{Q}$ est dénombrable, et comme $\mathbb{R}$ ne l'est pas, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ non plus. Il n'est pas très compliqué de montrer que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ a puissance du continu (*i.e.* a le même cardinal que $\mathbb{R}$).

III.7 Partie entière, partie décimale

Nous étudions maintenant les représentations des réels dans la vie pratique. Pour cela, nous commençons par séparer la partie entière et la partie décimale, en définissant rigoureusement ces notions.

Définition 6.3.32 (Partie entière)
La partie entière d'un réel x, notée $\lfloor x \rfloor$ est le quotient de la division euclidienne de x par 1. Il s'agit donc de l'unique entier n tel qu'il existe $r \in [0, 1[$ tel que $x = n + r$.

Notation 6.3.33 (Partie décimale)
Le réel r de la définition précédente (reste de la division de x par 1) est parfois noté $\{x\}$, lorsqu'il n'y a pas de confusion possible avec la notation ensembliste désignant le sigleton dont l'unique élément est x.

Proposition 6.3.34 (Caractérisations de la partie entière)
Soit $x \in \mathbb{R}$.
(i) $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leqslant x\}$;
(ii) $\lfloor x \rfloor = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid n > x\} - 1$;
(iii) $\lfloor x \rfloor$ *est l'unique entier tel que* $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$;
(iv) $\lfloor x \rfloor$ *est l'unique entier tel que* $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$.

On donne le graphe de la fonction partie entière : $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ en figure 6.1

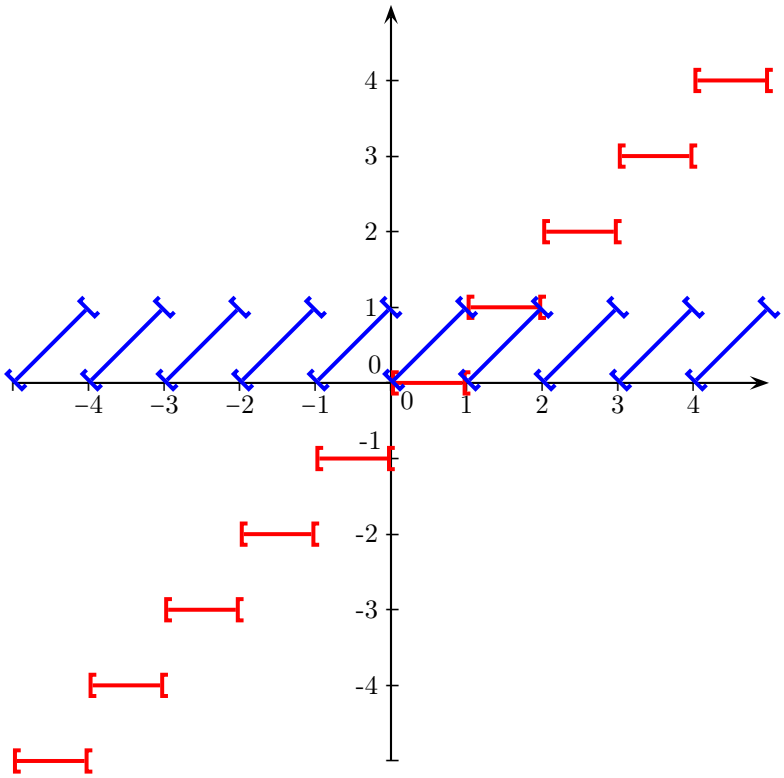


FIGURE 6.1 – Graphe de la partie entière et de la partie décimale

Définition 6.3.35 (partie entière par excès, HP)

On définit parfois aussi la *partie entière par excès*, notée $\lceil x \rceil$, comme étant le plus petit entier supérieur ou égal à x :

$$\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant x\}.$$

La partie entière par excès est alors caractérisée par son appartenance à n et l'un ou l'autre des encadrements suivants :

$$x \leqslant \lceil x \rceil < x + 1 \qquad \text{et} \qquad \lceil x \rceil - 1 < x \leqslant \lceil x \rceil.$$

Proposition 6.3.36 (Relation entre partie entière et partie entière par excès)

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a alors

1. $\lceil x \rceil = \begin{cases} \lfloor x \rfloor + 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \\ \lfloor x \rfloor & \text{si } x \in \mathbb{Z} \end{cases}$
2. $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$.

On reconnaît dans l'encadrement définissant la partie entière et la partie entière par excès le corollaire de la propriété d'Archimède. Les liens avec ce corollaire sont réciproques, puisque inversement, l'unique entier n tel que $ny \leqslant x < (n+1)y$ peut s'exprimer à l'aide d'une partie entière :

$$n = \left\lfloor \frac{y}{x} \right\rfloor.$$

En particulier, cette égalité donne l'expression du quotient de la division euclidienne de y par x.

Propriétés 6.3.37 (propriétés de la partie entière)

1. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1 \geqslant \lfloor x + y \rfloor \geqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$;
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}_+,\ \lfloor xy \rfloor \geqslant \lfloor x \rfloor \cdot \lfloor y \rfloor$;
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ \lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

◁ **Éléments de preuve.**

Le premier point s'obtient en écrivant $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$ et $y = \lfloor y \rfloor + \{y\}$ et en remarquant que $\{x\} + \{y\} \in [0, 2[$. Les deux autres points sont évidents. ▷

III.8 Représentation décimale

Note Historique 6.3.38 (petit aperçu historique de la représentation des nombres)

- Dès l'antiquité, les mathématiciens se rendent compte de la nécessité de rendre la notion de nombre indépendante de toute unité ou toute échelle. Ainsi, les Grecs définissent un nombre comme un rapport entre deux grandeurs de même type, par exemple entre deux longueurs. Ainsi, le théorème de Thalès (premier mathématicien grec important, début du 1er millénaire avant JC) s'exprime sous forme de rapports de longueur.
- Les premières représentations des entiers sont des numérations additives (on ajoute des symboles pour faire des nombres plus gros). Le premier système de numération connu est simplement une succession d'encoches dans un bout de bois ou un os. D'ailleurs, le mot « calcul » dérive du mot « calculus » signifiant caillou (pensez aux calculs rénaux !), car les bergers utilisaient des caillous pour compter leurs moutons.
- Beaucoup plus tard, il reste encore des vestiges de ce système de numération chez les romains, même s'ils disposent d'un système un peu plus sophistiqué (plusieurs symboles pour désigner différentes grandeurs, et notation soustractive).
- La numération de position (qui correspond à une numération dans une base donnée, la position d'un chiffre déterminant le coefficient multiplicatif qui lui sera appliqué) apparaît vraissemblablement à Babylone. Les nombres y sont représentés en base 60 (y compris pour les décimales) ; les « chiffres » de 1 à 60 sont représentés grâce à une numération additive, à l'aide de deux symboles de valeur 1 et 10. Le zéro n'existant pas encore, la position des chiffres n'est pas toujours très claire.
- Il reste d'ailleurs dans notre civilisation des vestiges de cette numération en base 60. Lesquels ?
- Les fractions apparaissent dès le 2e millénaire avant JC, à Babylone, où un calcul très complexe des fractions est mis en place. Imaginez-vous faire des opérations sur des fractions en base 60... Les règles calculatoires (sommes, produits) ne sont pas encore bien établies, et restent intuitive. La plupart des calculs sur les fractions sont faits à l'aide de tables.
- La découverte des nombres irrationnels date probablement de Pythagore (diagonale du carré), mais le secret est gardé. Hippase de Métaponte dévoile aux non initiés l'existence de grandeurs incommensurables (*i.e.* dont le rapport est irrationnel). Selon la légende, il est jeté du haut d'une falaise pour avoir révélé le secret pythagoricien. Quelle est la part de vérité dans cette histoire ? C'est dur à dire. Il est possible aussi que la découverte des irrationnels provienne de propriétés géométriques du pentagone : une construction fractale d'une suite de pentagones permet de montrer géométriquement que l'algorithme d'Euclide pour le rapport entre la diagonale et le côté ne se termine pas, ce qui équivaut à l'incommensurabilité de ces deux grandeurs.
- La numération actuelle est une numération en base 10, et une numération de position (l'un n'entraînant pas l'autre, la notation romaine n'est pas une numération de position, mais est bien une numération en base 10). La numération de position s'est imposée suite à la diffusion des ouvrage de Al Khwarizmi diffusant le système de numération indien. L'intermédiaire arabe de cette diffusion a eu pour conséquence la terminologie de « chiffres arabes », mais il s'agit bien de « chiffres indiens », même si la graphologie de ces chiffres a beaucoup changé. L'importance de l'apport est bien plus le système de numération par position (avec un symbole pour représenter 0) que la graphie précise des chiffres.

Notation 6.3.39 (nombres décimaux)

- Nous notons $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux, c'est à dire des réels x tels qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $10^n x$ est entier.
- Étant donné $n \in \mathbb{N}$, nous notons $\mathbb{D}_n$ l'ensemble des nombres décimaux tels que $10^n x \in \mathbb{Z}$; Par exemple $\mathbb{D}_0 = \mathbb{Z}$, et $\mathbb{D}_1$ sont les décimaux s'écrivant avec au plus un chiffre après la virgule.

Proposition 6.3.40 (Approximations décimales d'un réel x)

Soit x un réel et $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe un unique élément y de $\mathbb{D}_n$ tel que

$$y_n \leqslant x < y_n + 10^{-n}.$$

- *Le décimal y_n est appelé valeur approchée décimale à la précision 10^{-n} par défaut*
- *Le décimal $y_n + 10^{-n}$ est appelé valeur approchée décimale à la précision 10^{-n} par excès.*

◁ **Éléments de preuve.**

Définir y_n à l'aide d'une partie entière. ▷

Les inégalités satisfaites par les y_n et leur unicité montrent facilement que :

Lemme 6.3.41

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $a_n \in [\![0, 9]\!]$ tel que $y_n - y_{n-1} = \frac{a_n}{10^n}$.

Théorème 6.3.42 (Existence du développement décimal de x)

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, des entiers $a_n \in [\![0, 9]\!]$ tels que

(i) il existe $n_0 \in \mathbb{Z}_-$ tel que pour tout $n \leqslant n_0$, $a_n = 0$,

(ii) $$x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n 10^{-n} = \sum_{n=n_0}^{0} a_n 10^{-n} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n 10^{-n} = \sum_{n=n_0}^{0} a_n 10^{-n} \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n 10^{-n}.$$

(iii) Sauf si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 9$, on a alors :

$$\lfloor x \rfloor = \sum_{n=n_0}^{0} a_n 10^{-n} \qquad et \qquad \{x\} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n 10^{-n}$$

◁ **Éléments de preuve.**

Se ramener dans $[0, 1]$ en divisant par une puissance de 10, et définir les a_n comme dans le lemme précédent. Vérifier le troisième point par encadrement de la somme. ▷

Théorème 6.3.43 (Unicité du développement décimal de x)

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

1. *Si x n'est pas décimal, x admet un unique développement décimal.*
2. *Si x est décimal, x admet deux développements décimaux exactement, l'un terminant uniquement par des 9, l'autre terminant uniquement par des 0*

◁ **Éléments de preuve.**

Considérer la première différence dans les développements décimaux, et majorer les restes suivant cette différence : ces restes ne peuvent compenser la différence que si l'un est nul et l'autre obtenu pour les valeurs maximales des a_n. ▷

Définition 6.3.44 (Développement propre)

On appelle développement décimal propre de x l'unique développement de x si x n'est pas décimal, ou l'unique développement de x terminant par des 0 si x est décimal. Ainsi, tout réel admet un unique développement décimal propre

Tout ce qui a été fait ci-dessus en base 10 se généralise immédiatement en base $b \in [\![2, +\infty[\![$. Le cas $b = 2$ est particulièrement important en informatique. Ainsi, tout réel admet une écriture en base 2, unique, sauf si elle se termine uniquement par des 0 ou uniquement par des 1.

IV Intervalles

IV.1 Description des intervalles

Nous définissons les intervalles par leur propriété de convexité :

Définition 6.4.1 (ensemble convexe, figure 6.2)

Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. On dit que E est convexe si et seulement si pour tout couple de points A et B de E, le segment $[AB]$ est entièrement inclus dans E.

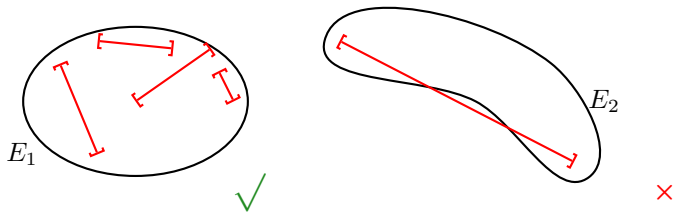


FIGURE 6.2 – Un sous-ensemble convexe E_1 et un sous-ensemble non convexe E_2 de $\mathbb{R}^2$

Définition 6.4.2 (Intervalle)

Un intervalle I de $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble convexe I de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire tel que :

$$\forall (a,b) \in I^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ a \leqslant x \leqslant b \Longrightarrow x \in I.$$

Intuitivement, « il n'y a pas de trou dans un intervalle ».

Théorème 6.4.3 (Inventaire des intervalles réels)

Tout intervalle I de $\mathbb{R}$ est d'une des formes suivantes, pour certaines valeurs réelles a et b :

- $[a,b] = \{x \in \mathbb{R},\ a \leqslant x \leqslant b\},\ a \leqslant b$;
- $]a,b[= \{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\},\ a < b$;
- $[a,b[= \{x \in \mathbb{R},\ a \leqslant x < b\},\ a < b$;
- $]a,b] = \{x \in \mathbb{R},\ a < x \leqslant b\},\ a < b$;
- $[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R},\ x \geqslant a\}$;
- $]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R},\ x > a\}$;
- $]-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R},\ x \leqslant b\}$;
- $]-\infty,b[= \{x \in \mathbb{R},\ x < b\}$;
- $]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$;
- $\varnothing$.

◁ **Éléments de preuve.**
Si I est non vide, sa borne inférieure a et sa borne supérieure b existent (éventuellement infinies). Montrer, par la propriété de convexité, que $]a,b[\subset I \subset [a,b]$. ▷

Remarquez que le premier cas pour $a = b$ dit que tous les singletons $\{a\}$ sont des intervalles.
On définit de la même manière les intervalles de $\mathbb{Q}$ comme sous-ensemble convexes de $\mathbb{Q}$ (comme on reste dans $\mathbb{Q}$, les trous ne se voient pas dans la propriété de convexité)
Un intervalle est donc délimité par deux réels (ou les infinis), et chacune des deux bornes, si elle est finie, peut être ou ne pas être dans l'intervalle (une borne infinie est toujours exclue de l'intervalle, l'infini n'étant pas un réel). L'appartenance ou non des bornes à l'intervalle nous incite à donner un classement des intervalles :

Définition 6.4.4 (intervalles ouverts, fermés, semi-ouverts)

- On dit qu'un intervalle est ouvert s'il est de la forme $]a,b[$, $]a,+\infty[$, $]-\infty,b[$, $\mathbb{R}$ ou $\varnothing$.
- On dit qu'un intervalle est fermé s'il est de la forme $[a,b]$, $[a,+\infty[$, $]-\infty,b]$, $\mathbb{R}$ ou $\varnothing$.
- On dit qu'un intervalle est semi-ouvert s'il est de la forme $[a,b[$ ou $]a,b]$.

Remarquez qu'il existe des intervalles à la fois ouverts et fermés ($\mathbb{R}$ et $\varnothing$)

IV.2 Intervalles et topologie

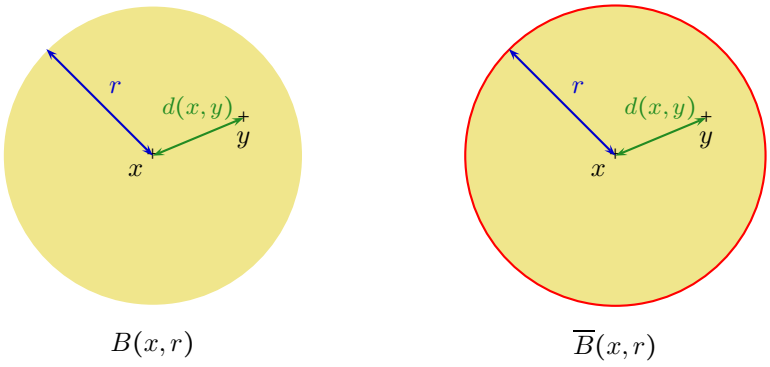
La notion d'intervalle est en fait liée à des notions de « topologie » plus générales (la topologie étant l'étude des sous-ensembles « ouverts » et « fermés » d'un ensemble). Nous nous limitons à une brève introduction de ces notions dans $\mathbb{R}^n$, la distance que nous utilisons étant la distance euclidienne canonique : si $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)$, la distance entre X et Y est :

$$d(X,Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}.$$

En particulier, si $x, y \in \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |y - x|$.
Ces notions se généralisent dans des espaces muni de distances plus générales (espaces métriques).

Définition 6.4.5 (Boule dans $\mathbb{R}^n$, figure 6.3)
Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $r \in \mathbb{R}_+$.

1. La boule ouverte de centre x et de rayon r est : $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(y,x) < r\}$
2. La boule fermée de centre x et de rayon r est : $\overline{B}(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(y,x) \leqslant r\}$



$B(x,r)$ $\overline{B}(x,r)$

FIGURE 6.3 – Boules dans $\mathbb{R}^n$

Exemple 6.4.6

Dans $\mathbb{R}$, les boules sont des intervalles (voir figure 6.4) :

- $B(x,r) =]x-r, x+r[$
- $\overline{B}(x,r) = [x-r, x+r]$

En fait, tout intervalle borné ouvert est une boule ouverte, tout intervalle borné fermé est une boule fermée :

- $]a,b[= B\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$,
- $[a,b] = \overline{B}\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$

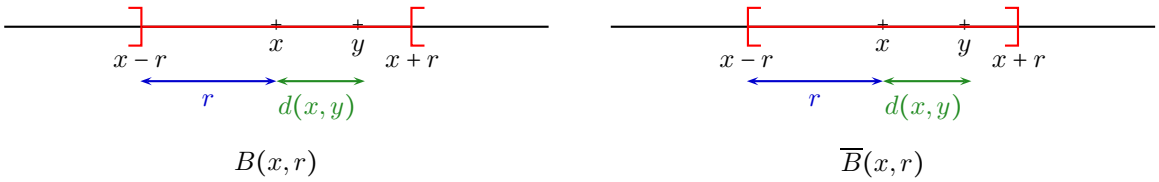


FIGURE 6.4 – Boule ouverte, boule fermée dans $\mathbb{R}$

Remarque 6.4.7

Il est important de retenir qu'une majoration de certaines valeur absolue se traduit par l'appartenance à une boule :

- une majoration du type $|x-a| \leqslant r$ traduit l'appartenance de x à la boule fermée $\overline{B}(a,r)$ de centre a de rayon r, donc à l'intervalle $[a-r, a+r]$;
- une majoration du type $|x-a| < r$ traduit l'appartenance de x à la boule ouverte $B(a,r)$ de centre a de rayon r, donc à l'intervalle $]a-r, a+r[$;

Définition 6.4.8 (Voisinage, figure 6.5)

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Un *voisinage* V de x est un sous-ensemble V de $\mathbb{R}^n$ tel qu'il existe une boule ouverte centrée en x entièrement contenue dans V :

$$\exists \varepsilon > 0,\ B(x,\varepsilon) \subset V, \qquad \text{i.e.} \qquad \exists \varepsilon > 0,\ \forall y \in E,\ d(y,x) < \varepsilon \Longrightarrow y \in V.$$

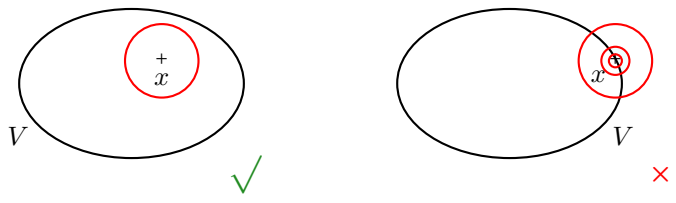


FIGURE 6.5 – Voisinage de x

En gros, V est un voisinage de x si x est « à l'intérieur de V », et non sur un bord. En s'éloignant un peu de x, on ne sort pas de V.

Exemple 6.4.9 (Voisinages dans $\mathbb{R}$)

- Dans $\mathbb{R}$, un voisinage de x est un ensemble contenant un intervalle $]a,b[$ tel que $x \in]a,b[$.
- Par extension et commodité, on dit parfois qu'un ensemble contenant un intervalle $]a,+\infty[$ est un voisinage de $+\infty$. Version symétrique pour $-\infty$.

Définition 6.4.10 (sous-ensemble ouvert)

- Un *ouvert* U de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble U de $\mathbb{R}^n$ qui est voisinage de tous ses points
- De manière équivalente, $U \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert ssi :

$$\forall x \in U, \exists \varepsilon > 0,\ B(x,\varepsilon) \subset U.$$

Intuitivement, un ouvert est un ensemble dont le « bord » est flou : on peut s'en approcher, mais jamais l'atteindre en restant dans U. Ainsi, l'image qu'il faut en garder est qu'un ouvert est un ensemble ne contenant pas son bord. Évidemment, n'ayant pas défini la notion de bord, ceci reste une image.

Définition 6.4.11 (sous-ensemble fermé)

Un sous-ensemble F de $\mathbb{R}^n$ est *fermé* si son complémentaire $\complement_E F$ est ouvert.

Cette fois, intuitivement, c'est le complémentaire qui ne contient pas son bord, donc F, lui contient tout son bord.

Exemples 6.4.12

1. Les intervalles ouverts sont des sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}$.
2. Les intervalles fermés sont des sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}$.
3. Les intervalles semi-ouverts ne sont ni ouverts ni fermés.
4. Plus généralement, une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ est un ouvert ; une boule fermée de $\mathbb{R}^n$ est un fermé (ce qui justifie la terminologie adoptée lors des définitions de ces objets)
5. $\mathbb{R}$ et $\varnothing$ sont des sous-ensembles à la fois fermés et ouverts de $\mathbb{R}$.
6. On peut montrer que les sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}$ sont les unions disjointes d'intervalles ouverts.

Proposition 6.4.13 (union, intersection d'ouverts et de fermés)

1. *Toute union quelconque d'ouverts est un ouvert ;*
2. *Toute intersection d'un nombre* fini *d'ouverts est un ouvert ;*
3. *Toute intersection quelconque de fermés est un fermé ;*
4. *Toute union d'un nombre* fini *de fermés est un fermé.*

◁ **Éléments de preuve.**

1. Si x est dans l'union, il existe une boule centrée en x restant dans l'un des ouverts, donc dans leur union.
2. Prendre le minimum des rayons des boules centrées en x restant dans chaque ouvert. Pourquoi doit-on se limiter au cas fini ?
3. Par complémentation
4. De même.

▷

Exemples 6.4.14

Voici deux contre-exemples à bien garder en tête :

1. Contre-exemple pour une intersection infinie d'ouverts : $\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left]-\frac{1}{n}, 1\right[= [0,1[$.
2. Contre-exemple pour une union infinie de fermés : $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n}, 1\right] =]0,1]$.

V Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$

Par commodité, il est parfois intéressant de pouvoir considérer les deux infinis comme des éléments comme les autres. Cela permet en particulier d'unifier certains énoncés et certaines démonstrations, qui sinon, nécessiteraient une disjonction de cas.

Définition 6.5.1 (droite achevée réelle)

La droite achevée réelle, notée $\overline{\mathbb{R}}$, est l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Définition 6.5.2 (relation d'ordre sur $\overline{\mathbb{R}}$)

On peut prolonger l'ordre de $\mathbb{R}$ en un ordre sur $\overline{\mathbb{R}}$ en posant :

$$\forall x \in \overline{\mathbb{R}}, \quad -\infty \leqslant x \leqslant +\infty.$$

Définition 6.5.3 (règles calculatoires dans $\overline{\mathbb{R}}$)

On peut prolonger partiellement les opérations de $\mathbb{R}$ sur $\overline{\mathbb{R}}$, en posant :

- $-(+\infty) = -\infty$
- $\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty\}, \quad x + (+\infty) = +\infty$
- $\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{+\infty\}, \quad x + (-\infty) = -\infty$
- $\frac{1}{+\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0$
- $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}_+^*, \quad x \times (+\infty) = +\infty, \quad x \times (-\infty) = -\infty,$
- $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}_-^*, \quad x \times (+\infty) = -\infty, \quad x \times (-\infty) = +\infty.$

En revanche, certaines opérations ne peuvent pas être définies de façon cohérente, comme le montre l'étude des formes indéterminées dans le calcul des limites.

Définition 6.5.4 (Formes indéterminées)

Les opérations suivantes ne sont pas définies, et définissent les formes indéterminées de la somme et du produit dans $\overline{\mathbb{R}}$:

- $-\infty + (+\infty)$
- $0 \times (+\infty)$
- $0 \times (-\infty)$.

Pour l'étude des limites, ces formes donnent également des formes indéterminées pour les puissances, par passage à l'exponentielle (voir le chapitre sur les suites).

Proposition 6.5.5 (Propriété fondamentale de $\mathbb{R}$ énoncée dans $\overline{\mathbb{R}}$)
Tout sous-ensemble E de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$

◁ **Éléments de preuve.**
Éliminer les cas $+\infty \in \overline{\mathbb{R}}$, $E = \varnothing$ et $E = \{-\infty\}$, pour se ramener au cas d'un sous-ensemble non vide $E' = E \cap \mathbb{R}$. Discuter suivant qu'il est majoré ou non. ▷

Remarque 6.5.6
Le résultat est bien sûr aussi valable pour les bornes inférieures.

Travailler dans $\overline{\mathbb{R}}$ nous permettra notamment de considérer des intervalles du type $[a, +\infty]$, ce qui n'a pas de sens dans $\mathbb{R}$.

7 Nombres complexes

Au reste, tant les vraies racines que les fausses ne sont pas toujours réelles, mais quelquefois seulement imaginaires, c'est à dire qu'on peut bien toujours en imaginer autant que j'ai dit en chaque équation, mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité qui corresponde à celles qu'on imagine ; comme encore qu'on puisse en imaginer trois en celle-ci :

$$x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0,$$

il n'y en a toutefois qu'une réelle qui est 2, et pour les deux autres, quoiqu'on les augmente ou diminue, ou multiplie en la façon que je viens d'expliquer, on ne saurait les rendre autres qu'imaginaires.

(René Descartes)

Ce que nous nommons temps imaginaire est en réalité le temps réel, et ce que nous nommons temps réel n'est qu'une figure de notre imagination.

(Stephen Hawking)

Les nombres complexes sont nés de l'étude des solutions des équations du troisième degré. Dans un premier temps, ils ont été utilisés sans se préoccuper de leur donner un sens précis : ils étaient des outils abstraits, imaginaire pourrait-on dire, pour accéder aux solutions, pouvant elles être bien réelles, des équations considérées.

I Les nombres complexes : définition et manipulations

I.1 Définition, forme algébrique

Note Historique 7.1.1

- Les nombres complexes ont été introduits par Cardan et Bombelli au 16-ième siècle, comme moyen d'exprimer certaines racines de polynômes de degrés 3 ou 4. A cette époque, l'introduction des nombres imaginaires (*via* des racines de réels négatifs) est un pur artifice.
- Ainsi, dès leur origine, les nombres complexes sont introduits pour pallier au fait que certains polynômes à coefficients réels n'ont pas de racines dans $\mathbb{R}$, comme par exemple $X^2 + 1$.
- La notation i est introduite par Euler en 1777 pour remplacer la notation $\sqrt{-1}$.

D'un point de vue formel, $\mathbb{C}$ est défini comme le plus petit sur-corps de $\mathbb{R}$ dans lequel le polynôme X^2+1 admet une racine (c'est ce qu'on appelle un corps de rupture du polynôme X^2+1, correspondant dans ce cas au corps de décomposition, le plus petit corps dans lequel le polynôme peut se factoriser en polynômes de degré 1).

Ainsi, il s'agit d'un ensemble contenant un élément i, racine de X^2+1, vérifiant donc $\mathrm{i}^2 = -1$, et muni d'une addition et d'un produit prolongeant celles de $\mathbb{R}$, avec les mêmes propriétés. En fait, la relation $\mathrm{i}^2 = -1$ et les propriétés de commutativité, associativité et distributivité déterminent entièrement les opérations sur $\mathbb{C}$.
Une construction possible consiste à visualiser l'ensemble des complexes comme l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni de lois convenablement définies, de sorte à pouvoir identifier l'axe des abscisses à l'ensemble des réels, et à disposer d'un élément (qui sera $(0,1)$) dont le carré est -1. C'est ce que nous allons faire ci-dessous.

Définition 7.1.2 (ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes)

L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ est l'ensemble $\mathbb{R}^2$, muni des opérations suivantes :

- $(a,b) + (a',b') = (a+a', b+b')$;
- $(a,b) \times (a',b') = (aa'-bb', ab'+a'b)$.

Remarque 7.1.3

L'application $\lambda \mapsto (\lambda, 0)$ étant injective, on identifie un réel λ au complexe $(\lambda, 0)$. Via cette identification, on peut considérer que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, et on vérifie facilement que la somme et le produit définis ci-dessus sur $\mathbb{C}$ prolongent les lois de $\mathbb{R}$.

Définition 7.1.4 (définition de la forme algébrique ; partie réelle, partie imaginaire)

- On note $1 = (1,0)$, et $\mathrm{i} = (0,1)$
- On a alors, pour tout $z = (a,b) \in \mathbb{C}$,

$$z = a \cdot 1 + b \cdot \mathrm{i} = a + \mathrm{i}\, b.$$

  (du fait de l'identification de la remarque précédente). C'est la *forme algébrique* du nombre complexe z.
- Soit $z = a + \mathrm{i}\, b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.
  - Le réel a est appelé *partie réelle de z*, et est noté $\mathrm{Re}(z)$;
  - Le réel b est appelé *partie imaginaire de z*, et est noté $\mathrm{Im}(z)$
- Un nombre $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(z) = 0$ est appelé *nombre imaginaire pur*.
- Un nombre $z \in \mathbb{C}$ vérifie $\mathrm{Im}(z) = 0$ ssi $z \in \mathbb{R}$.

Proposition 7.1.5 (propriétés liées au produit)

1. $\mathrm{i}^2 = -1$
2. *Le produit $(a + \mathrm{i}\, b)(a' + \mathrm{i}\, b')$ est simplement obtenu par utilisation des règles de distributivité et par la relation $\mathrm{i}^2 = -1$.*
3. *Si $z \neq 0$, alors z et inversible, et, si $z = a + \mathrm{i}\, b$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a l'expression de l'inverse :*

$$z^{-1} = \frac{a - \mathrm{i}\, b}{a^2 + b^2}.$$

◁ **Éléments de preuve.**
Ce sont des vérifications immédiates. ▷

Théorème 7.1.6 (structure de $\mathbb{C}$)

L'ensemble $\mathbb{C}$ muni des opérations ci-dessus est un corps.

◁ **Éléments de preuve.**

Il faut vérifier la commutativité des opérations, leur associativité, la distributivité du produit sur la somme, l'existence du neutre additif 0 et du neutre multiplicatif 1, l'existence des opposés $-x$ et l'inversibilité de tout complexe non nul. Fastidieux mais pas difficile. ▷

Les formules calculatoires telles que la factoriation de Bernoulli et la formule du binôme restent valides dans ce contexte, avec les mêmes démonstrations que dans $\mathbb{R}$, les propriétés des opérations étant les mêmes.

Dans la pratique, un nombre complexe est représenté sous sa forme algébrique $a + \mathrm{i}\,b$, ou sa forme trigonométrique que nous rappellerons plus loin. On perd un peu de vue le point de vue initial du couple (d'ailleurs, on peut introduire $\mathbb{C}$ de façon différente). Nous donnons dans la définition suivante la démarche inverse, permettant de revenir de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$. Cette interprétation est fructueuse pour la geométrie du plan, pouvant ainsi être étudiée sous l'angle des nombres complexes.

Définition 7.1.7 (affixe d'un point du plan)

Soit $A = (a, b)$ un point de $\mathbb{R}^2$. L'*affixe* du point A est le nombre complexe $z_A = a + \mathrm{i}\,b$.

Désormais, nous abandonnons la notation d'un complexe sous forme d'un couple, et nous représenterons un nombre complexe sous la forme $a + \mathrm{i}\,b$.
Remarquons que la construction de $\mathbb{C}$ à partir de $\mathbb{R}$ est un cas particulier d'une construction plus générale d' « extensions monogènes d'un corps $\mathbb{K}$ », à la base de la théorie de Galois : étant donné une racine x d'une équation polynomiale P à coefficients dans $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}[x]$ est l'ensemble de toutes les sommes, produits, quotients qu'on peut former à partir des éléments de $\mathbb{K}$ et de x. Par exemple $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{(a + b\sqrt{2}), (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$, et $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] = \{a + b\sqrt[3]{2} + c(\sqrt[3]{2})^2,\ (a, b, c) \in \mathbb{Q}^3\}$ (on peut montrer que tout quotient peut s'exprimer ainsi aussi).
De ce point de vue, $\mathbb{C} = \mathbb{R}[\mathrm{i}]$.

Nous avons donc défini $\mathbb{C}$ comme un corps de rupture sur $\mathbb{R}$ du polynôme $X^2 + 1$, et même un corps de décomposition, puisqu'on a alors la factorisation suivante : $X^2 + 1 = (X + \mathrm{i})(X - \mathrm{i})$. En fait, cette propriété est beaucoup plus générale, ainsi que le prouve le théorème suivant, d'une importance capitale :

Théorème 7.1.8 (d'Alembert-Gauss, admis)

Tout polynôme non constant à coefficients complexes admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

On démontrera plus tard que ceci implique que tout polynôme à coefficients complexes se factorise en polynômes de degré 1.
Le théorème de d'Alembert-Gauss se réexprime ainsi : $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, ce qui signifie qu'il n'existe pas d'autre nombre algébrique sur $\mathbb{C}$ que les nombres complexes eux-mêmes.
Le théorème de d'Alembert-Gauss, restreint aux polynômes à coefficients réels, allié au fait que $\mathbb{C}$ est par définition le plus petit corps dans lequel $X^2 + 1$ admet une racine, s'exprime en disant que $\mathbb{C}$ est la clôture algébrique de $\mathbb{R}$.

Note Historique 7.1.9

Le théorème de d'Alembert-Gauss est d'une importance capitale, puisque c'est ce résultat qui motive la construction de $\mathbb{C}$.

- Il est conjecturé depuis longtemps déjà lorsque d'Alembert en propose une preuve en 1743. Cette preuve n'est pas satisfaisante, Gauss va jusqu'à la qualifier de *petitio principii*, puisqu'elle part de l'hypothèse de l'existence de racines « fictives ».
- La première preuve complète et rigoureuse revient à Gauss, au 19-ième siècle.

Nous voyons maintenant quelques notions directement liées à la forme algébrique des nombres complexes

Définition 7.1.10 (conjugué d'un nombre complexe)
Soit $z = a + \mathrm{i}\,b$ (avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$) un nombre complexe. Le *conjugué* de z est le nombre complexe

$$\overline{z} = a - \mathrm{i}\,b.$$

Propriétés 7.1.11 (propriétés de la conjugaison dans $\mathbb{C}$)
Soit z et z' deux nombres complexes. Alors :

1. $\overline{\overline{z}} = z$ *(autrement dit, la conjugaison est une involution) ;*
2. $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ *et* $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}$ *;*
3. $z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$ *;*
4. $z = -\overline{z} \iff z$ *imaginaire pur ;*
5. $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$, $\quad \overline{zz'} = \overline{z}\cdot\overline{z'}$, $\quad \overline{z^{-1}} = \overline{z}^{-1}$, $\quad \overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

◁ **Éléments de preuve.**
Vérifications faciles. Pour l'inverse, utiliser la formule obtenue tantôt, ou conjuguer la relation $zz^{-1} = 1$. ▷

I.2 Module

Nous définissons maintenant quelques notions liées à la structure euclidienne de $\mathbb{R}^2$, donc aux propriétés métriques.

Définition 7.1.12 (module d'un nombre complexe)
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, et $z = a + \mathrm{i}\,b$. Le *module* de z est le réel positif défini par

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Remarques 7.1.13

1. *Via* la correspondance entre $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$ le module d'un nombre complexe correspond à la norme des vecteurs. Ainsi, si A est le point d'affixe z et O l'origine, alors $|z| = \|\overrightarrow{OA}\|$.
2. Si z est réel (i.e. $\mathrm{Im}(z) = 0$), alors le module de z est égal à $\sqrt{z^2}$, i.e. à la valeur absolue du réel z. Ainsi, la notation utilisée pour le module n'entre pas en conflit avec la notation de la valeur absolue.

Exemples 7.1.14

1. Décrire l'ensemble des nombres complexes z tels que $|z - a| = r$, où $a \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.
2. Même question avec l'inéquation $|z - a| \leqslant r$.

Propriétés 7.1.15 (propriétés du module)
Soit z et z' deux nombres complexes. Alors :

1. $z = 0 \iff |z| = 0$ *;*
2. $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$ *et* $|\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|$ *;*

3. $|z|^2 = z\overline{z}$ *(expression du module à l'aide du conjugué)*
4. $|zz'| = |z| \cdot |z'|$ *et si* $z' \neq 0$, $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ *(multiplicativité du module)*
5. $|z| = |\overline{z}|$ *(invariance du module par conjugaison)*
6. $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$ *(inégalité triangulaire, ou sous-additivité du module).*
   L'égalité est vérifiée si et seulement si $z = 0$ *ou s'il existe* $\lambda \in \mathbb{R}_+$ *tel que* $z' = \lambda z$.

◁ **Éléments de preuve.**
Le seul point non trivial est l'inégalité triangulaire. Comparer les carrés, en exprimant les modules à l'aide des conjugués. Se ramener à une comparaison de la partie réelle et du module de $z \cdot \overline{z'}$. ▷

On en déduit notamment une méthode pour exprimer sous forme algébrique un quotient de deux complexes donnés sous forme algébrique (pour les autres opérations, cela ne pose aucune difficulté).

Méthode 7.1.16 (Expression algébrique d'un quotient)
Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes donnés sous forme algébrique, avec $z_2 \neq 0$. Pour trouver la forme algébrique du quotient $\frac{z_1}{z_2}$, multipliez le dénominateur et le numérateur par $\overline{z_2}$, c'est-à-dire considérez l'expression $\frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}}$
De la sorte, le dénominateur est maintenant un réel.

II Trigonométrie

II.1 Cercle trigonométrique, formules de trigonométrie

Littéralement, « trigonométrie » signifie « mesure des trois angles », donc se rapporte aux propriétés des angles d'un triangle. On fait donc ainsi référence aux interprétations géométriques usuelles des fonctions trigonométriques.

Note Historique 7.2.1
- La trigonométrie (l'étude des mesures dans le triangle) existe depuis l'antiquité (Égypte, Babylone, Grèce), et est développée en rapport avec l'astronomie.
- Le sinus, sous sa forme actuelle, a été introduit par les indiens aux alentours de 500 ap JC, pour l'étude des angles célestes. La première table connue date de 499, et est attribuée au mathématicien indien Aryabhata. En 628, Brahmagupta construit une approximation de la fonction sinus par interpolation.
- Ces notions nous sont parvenus grâce aux travaux de synthèse des mathématiciens arabes des 9^e et 10^e siècles (essentiellement basés dans les actuelles Irak, Iran et Khazakstan)
- Auparavant, les grecs utilisaient plutôt la mesure de la corde, ce qui est moins commode, mais assez équivalent.
- Le nom de « sinus » provient d'un mot sanscrit signifiant « arc », apparaissant dans l'ouvrage de Aryabhata, et transcrit phonétiquement en arabe, puis déformé en un mot proche signifiant « repli de vêtement ». Il a été traduit en latin au 12^e siècle par le mot « sinus » signifiant « pli ».

Définition 7.2.2 (cercle trigonométrique)
Le cercle trigonométrique (ou cercle unité) est le sous-ensemble de $\mathbb{C}$, noté $\mathbb{U}$ (comme « unité »), constitué des nombres complexes de module 1 :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

Le cercle trigonométrique correspond dans l'interprétation géométrique des complexes au cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1 de $\mathbb{R}^2$.

Définition 7.2.3 (fonctions trigonométriques, figure 7.1)

Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère le cercle trigonométrique dans le plan euclidien canonique. Soit z le point du cercle trigonométrique tel que le rayon correspondant du cercle trigonométrique forme avec l'axe des réels un angle (orienté dans le sens direct) de x. On définit alors les fonctions cosinus, sinus et tangente par :

$$\cos(x) = \mathrm{Re}(z), \qquad \sin(x) = \mathrm{Im}(z) \qquad \text{et} \qquad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \text{ si } \cos(x) \neq 0.$$

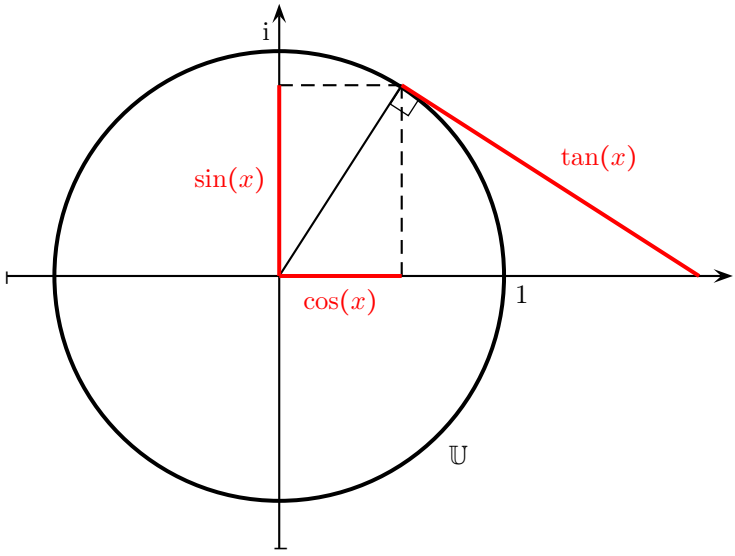


FIGURE 7.1 – Fonctions trigonométriques

On retrouve facilement l'interprétation usuelle sur les triangles (définitions données au lycée), pour un angle $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$: si ABC est un triangle rectangle en A, et d'angle en B égal à α, alors :

$$\sin(x) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}, \qquad \cos(x) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}, \qquad \tan(x) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}.$$

On utilise parfois une autre fonction trigonométrique, version symétrique de la tangente :

Définition 7.2.4 (cotangente)

Soit $x \in \mathbb{R}$. La cotangente est définie, pour tout x tel que $\sin(x) \neq 0$, par :

$$\mathrm{cotan}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Ainsi, en tout point en lequel à la fois $\sin(x) \neq 0$ et $\cos(x) \neq 0$, on a $\mathrm{cotan}(x) = \frac{1}{\tan(x)}$.

Proposition 7.2.5 (domaines de définition des fonctions trigonométriques)

1. *Les fonctions* sin *et* cos *sont définies sur* $\mathbb{R}$.
2. *La fonction* tan *est définie sur* $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[= \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\right\}$.
3. *La fonction* cotan *est définie sur* $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n\pi, (n+1)\pi[= \mathbb{R} \setminus \{n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$.

Les propriétés suivantes sont à bien comprendre et visualiser sur le cercle trigonométrique.

Proposition 7.2.6 (Symétries de sin et cos)

1. sin *et* cos *sont* 2π*-périodiques ;*
2. sin *est impaire et* cos *est paire ;*
3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$, *et* $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$, *et* $\sin(\pi - x) = \sin(x)$.
5. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$, *et* $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$.
6. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$, *et* $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$.

◁ **Éléments de preuve.**
Du fait de la définition géométrique donnée, la preuve l'est aussi : il s'agit d'étudier les symétries du cercle trigonométrique. ▷

Proposition 7.2.7 (symétries de tan et cotan)

1. tan *et* cotan *sont* π*-périodiques ;*
2. tan *et* cotan *sont impaires ;*
3. *pour tout* x *dans le domaine de* tan, $\tan(\pi - x) = -\tan(x)$ *;*
4. *pour tout* x *dans le domaine de* cotan, $\operatorname{cotan}(\pi - x) = -\operatorname{cotan}(x)$ *;*
5. *pour tout* $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{n\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}\right\}$, $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{cotan}(x)$ *et* $\operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan(x)$ *;*
6. *pour tout* $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{n\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}\right\}$, $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{cotan}(x)$ *et* $\operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\tan(x)$ *;*

Nous rappelons :

Proposition 7.2.8 (Valeurs particulières des fonctions trigonométriques)

Voici un tableau des valeurs particulières à bien connaître, entre 0 *et* $\frac{\pi}{2}$ *(les autres s'obtiennent par les symétries) :*

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–
cotan	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

◁ **Éléments de preuve.**
Amusez-vous à retouver ces valeurs géométriquement, en vous servant du théorème de Pythagore. ▷

Nous obtenons les graphes des fonctions trigonomtriques, les variations pouvant être obtenues par des considérations purement géométriques (voir figure 7.2).

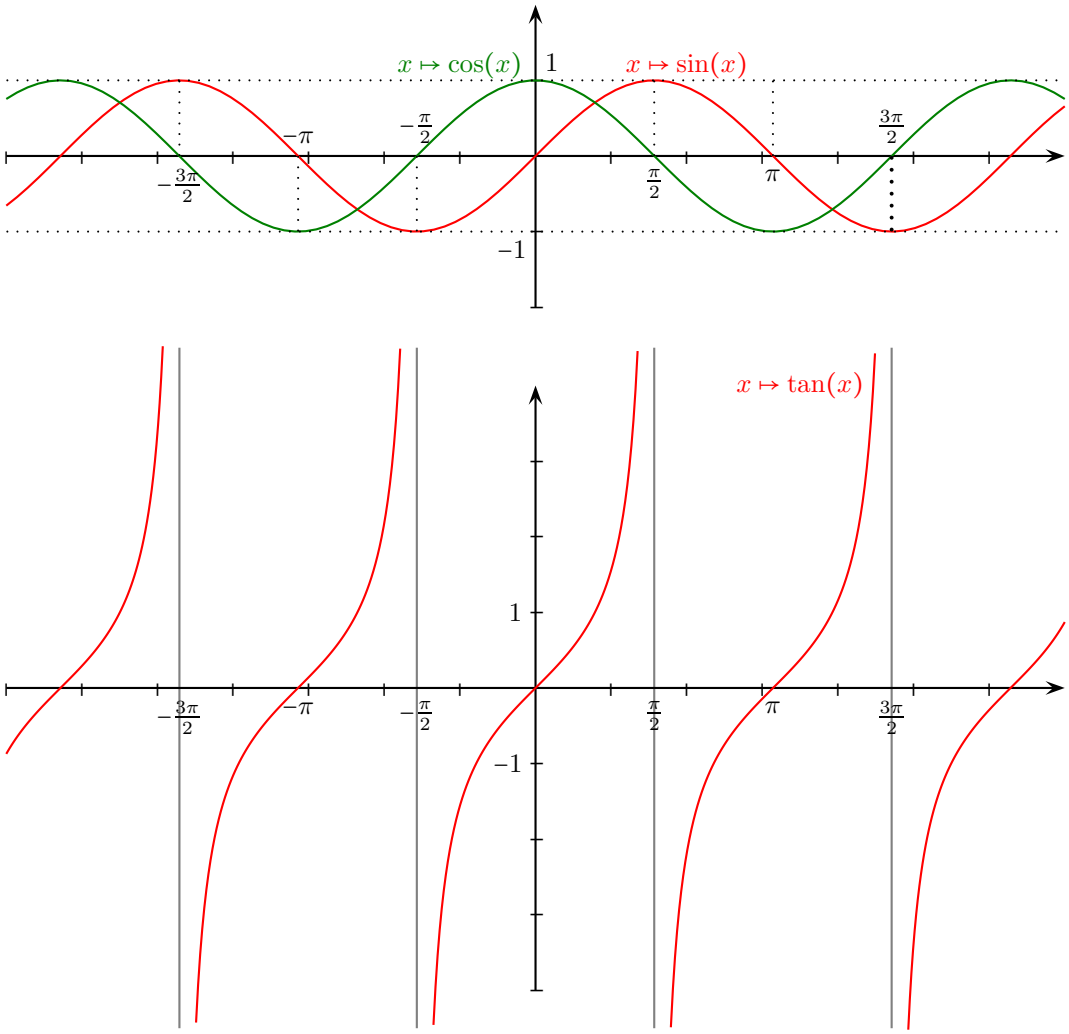


FIGURE 7.2 – Graphe des fonctions trigonométriques

Et voici les inévitables formules à retenir (inutile de les retenir toutes : certaines se déduisent facilement des autres ; sélectionnez bien celles que vous apprenez et entraînez-vous à en déduire les autres).

Proposition 7.2.9 (identité remarquable, ou théorème de Pythagore)
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

◁ **Éléments de preuve.**
C'est juste dire que $\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)$ est sur le cercle... ▷

Proposition 7.2.10 (formules d'addition)
Soit a *et* b *deux réels. Alors :*

(i) $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$

(ii) $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$

(iii) $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

(iv) $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$

(v) Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $\tan(a)$, $\tan(b)$ *et* $\tan(a+b)$ *soient définis :*

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$$

(vi) *Pour tout* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $\tan(a)$, $\tan(b)$ *et* $\tan(a-b)$ *soient définis :*

$$\tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$$

(vii) *Pour tout* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $\operatorname{cotan}(a)$, $\operatorname{cotan}(b)$ *et* $\operatorname{cotan}(a+b)$ *soient définis :*

$$\operatorname{cotan}(a+b) = \frac{\operatorname{cotan}(a)\operatorname{cotan}(b)-1}{\operatorname{cotan}(a)+\operatorname{cotan}(b)}$$

◁ **Éléments de preuve.**

(ii) découle de (i) en considérant $-b$, (iii) découle de (i) en considérant $\sin\left(\frac{\pi}{2}+a+b\right)$, et (iv) découle de (iii). (v), (vi) et (vii) en découlent par quotient et simplifications.

On peut montrer (i) géométriquement par projections signées. On peut aussi calculer de deux manières différentes le produit scalaire $\langle u,v\rangle$ où u et v sont les vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^2$ basés en $(0,0)$, et formant un angle respectivement de a et de b avec la demi-droite réelle positive. ▷

Proposition 7.2.11 (formules de duplication des angles)

Soit a *un réels. Alors :*

(i) $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$

(ii) $\cos(2a) = \cos^2(a)-\sin^2(a) = 1-2\sin^2(a) = 2\cos^2(a)-1.$

(iii) $\tan(2a) = \dfrac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$

(iv) $\operatorname{cotan}(2a) = \dfrac{\operatorname{cotan}^2(a)-1}{2\operatorname{cotan}(a)}$

◁ **Éléments de preuve.**

Appliquer ce qui précède avec $a = b$. ▷

Proposition 7.2.12 (formules de linéarisation des carrés, ou formules de Carnot)

Soit $a \in \mathbb{R}$ *:*

(i) $\cos^2(a) = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$

(ii) $\sin^2(a) = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$

◁ **Éléments de preuve.**

Utiliser (ii) de la proposition précédente. ▷

Proposition 7.2.13 (formules de développement, ou transformation de produit en somme)

Soit a *et* b *deux réels.*

(i) $\sin(a)\sin(b) = \dfrac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]$

(ii) $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}[\cos(a-b)+\cos(a+b)]$

(iii) $\sin(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$

◁ **Éléments de preuve.**
Sommer ou soustraire 2 par 2 les formules d'addition. ▷

Proposition 7.2.14 (formules de factorisation, ou formules de Simpson)
Soit p et q deux réels.

(i) $\sin(p)+\sin(q)=2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

(ii) $\sin(p)-\sin(q)=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

(iii) $\cos(p)+\cos(q)=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

(iv) $\cos(p)-\cos(q)=-2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

◁ **Éléments de preuve.**
Changement de variable dans les formules de développement. ▷

Proposition 7.2.15 (formules de l'arc moitié)
Soit x un réel tel que $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ soit défini. Alors :

(i) $\sin(x)=\dfrac{2t}{1+t^2}$

(ii) $\cos(x)=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

(iii) $\tan(x)=\dfrac{2t}{1-t^2}$ *si* $t\neq\pm1$.

◁ **Éléments de preuve.**
Utiliser la formule de duplication de l'angle et le fait que $\frac{1}{\cos^2(y)}=1+\tan^2(y)$. ▷

Proposition 7.2.16 (formule de factorisation de $a\cos x+b\sin x$)
Soit a, b et x trois réels, $a\neq0$. Alors

$$a\cos(x)+b\sin(x)=\frac{a}{\cos\varphi}\cos(x-\varphi),\ \text{où}\ \tan(\varphi)=\frac{b}{a}.$$

◁ **Éléments de preuve.**
Utilisation facile de la formule d'addition. ▷

En physique, $\dfrac{a}{\cos(\varphi)}$ est appelé *amplitude* et φ est appelé la *phase*.

II.2 Forme trigonométrique, et applications à la trigonométrie

Définition 7.2.17 (exponentielle complexe)
On définit l'exponentielle complexe sur les nombres imaginaires purs par :

$$\forall\theta\in\mathbb{R},\quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta.$$

Proposition 7.2.18

La fonction $\theta \mapsto e^{i\theta}$ est surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{U}$. Plus précisément, c'est une bijection de tout intervalle $]\alpha, \alpha + 2\pi]$ sur $\mathbb{U}$, ainsi que de tout intervalle $[\alpha, \alpha + 2\pi[$ sur $\mathbb{U}$.

◁ **Éléments de preuve.**

La surjectivité provient de la définition-même de cosinus et sinus comme projetés d'un point du cercle. L'injectivité modulo 2π provient du fait que deux points distincts de $\mathbb{U}$ ont des coordonnées distinctes. ▷

Corollaire 7.2.19

La fonction de $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi]$ sur $\mathbb{C}^*$ définie par $(r, \theta) \mapsto re^{i\theta}$ est bijective.

Définition 7.2.20 (forme trigonométrique)

- Ainsi, tout nombre complexe non nul z s'écrit sous la forme $z = re^{i\theta}$ appelée forme trigonométrique de z, avec $r > 0$;
- r est unique, égal au module de z ;
- θ est unique *modulo* 2π, appelé argument de z.
- L'unique argument θ de l'intervalle $]-\pi, \pi]$ est appelé *argument principal* de z et est noté $\arg(z)$.

Proposition 7.2.21 (formules d'Euler)

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Théorème 7.2.22 (formules trigonométriques d'addition)

Pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$.

◁ **Éléments de preuve.**

Le rapport de l'un à l'autre se fait par les formules d'addition. ▷

Remarque 7.2.23

Cette formule synthétise les formules d'addition. Si vous les avez oubliées, vous les retrouvez facilement en considérant la partie réelle ou la partie imaginaire de l'égalité ci-dessus.

Corollaire 7.2.24 (Formule de (De) Moivre, 1707)

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n \qquad \textit{soit:} \qquad \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^n.$$

◁ **Éléments de preuve.**

Récurrence triviale à partir du théorème précédent. ▷

Note Historique 7.2.25

- Abraham de Moivre était un mathématicien ami des physiciens et astronomes Newton et Halley. Il faudrait théoriquement dire « formule de De Moivre », (selon la règle de conservation de la particule onomastique pour les noms d'une syllabe, comme de Gaulle), mais on dit plus souvent « formule de Moivre ».
- La version démontrée par Moivre est la version donnée avec les fonctions sin et cos, le lien avec les propriétés de l'exponentielle n'ayant été découvertes que plus tard par Euler (19^{e} siècle), qui est à l'origine de la notation exponentielle $e^{i\theta}$.

L'utilisation des exponentielles complexes permet de simplifier un certain nombre de calculs liés à la trigonométrie. Nous présentons ci-dessous quelques méthodes à connaître.

Méthode 7.2.26 (Principe de symétrisation des arguments)

Cette méthode permet d'exprimer une somme ou une différence de deux exponentielles à l'aide des fonctions trigonométriques. C'est notamment intéressant pour obtenir la partie réelle et la partie imaginaire sous forme factorisée. Soit a et b deux réels. Alors :

- $e^{ia} + e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{a-b}{2}} + e^{-i\frac{a-b}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{i\frac{a+b}{2}}$.
- $e^{ia} - e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{a-b}{2}} - e^{-i\frac{a-b}{2}}\right) = 2i\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{i\frac{a+b}{2}}$.

Remarquez que c'est une façon commode de retenir ou retrouver les formules de factorisation des fonctions trigonométriques (transformation d'une somme en produit).

Exemple 7.2.27

Factoriser $1 + e^{ia}$.

Méthode 7.2.28 (Linéarisation)

Le but est d'exprimer $\cos^n\theta$ ou $\sin^n\theta$ en fonction de $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$, $k \in \mathbb{N}$. Principe du calcul :

1. Exprimer $\cos\theta$ (ou $\sin\theta$) à l'aide des formules d'Euler ;
2. Développer à l'aide de la formule du binôme de Newton ;
3. Regrouper dans le développement les exponentielles conjuguées et les réexprimer à l'aide des fonctions sin et cos en utilisant la formule d'Euler dans l'autre sens.

Exemple 7.2.29

1. Linéariser $\cos^4(x)$
2. Linéariser $\sin^6(x)$. En déduire $\displaystyle\int_0^\pi \sin^6(x)\,dx$.
3. Proposer plus efficace pour le calcul de $\displaystyle\int_0^\pi \sin^5(x)\,dx$

Méthode 7.2.30 (« délinéarisation », ou les polynômes de Tchébychev)

Il s'agit de la méthode inverse, consistant à écrire $\cos(n\theta)$ ou $\sin(n\theta)$ en fonction des puissances de $\cos(x)$ et/ou $\sin(x)$. Le principe du calcul :

1. On utilise la formule de Moivre pour exprimer $\cos(n\theta)$ ou $\sin(n\theta)$ comme partie réelle ou imaginaire de $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n$.
2. On développe cette expression à l'aide de la formule du binôme de Newton

3. On utilise l'identité remarquable $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ pour exprimer la partie réelle (ou imaginaire) sous forme d'un polynôme en $\cos(x)$ (pour $\cos(n\theta)$) ou le produit de $\sin(x)$ par un polynôme en $\cos(x)$ (pour $\sin(n\theta)$)

Remarque 7.2.31

Les polynômes obtenus ainsi s'appelle polynômes de Tchébychev, de première espèce pour les cosinus, et de seconde espèce pour les sinus. On peut définir ces polynômes par récurrence et redémontrer directement à l'aide de ces relations de récurrence et des formules de trigonométrie le fait qu'ils assurent la délinéarisation de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$. La méthode ci-dessus permet alors d'obtenir une expression explicite de ces polynômes.

Méthode 7.2.32 (Sommes de sin et cos)

Le principe général est d'écrire une somme de sin (ou de cos) sous forme de partie imaginaire (ou réelle) d'une somme d'exponentielles. On peut alors souvent exploiter le caractère géométrique du terme $e^{i\,n\theta}$, par utilisation des propriétés des sommes géométriques, ou de la formule du binôme etc.

Exemple 7.2.33 (noyau de Dirichlet, à savoir refaire)

Soit a et b deux réels, vérifiant $b \not\equiv 0\ [2\pi]$, et

$$C = \cos a + \cos(a+b) + \cos(a+2b) + \cdots + \cos(a+nb) = \sum_{k=0}^{n} \cos(a+kb).$$

Alors $C = \cos\left(a + \dfrac{bn}{2}\right) \cdot \dfrac{\sin\left(\frac{n+1}{2} \cdot b\right)}{\sin\frac{b}{2}}$.

II.3 L'exponentielle complexe

Définition 7.2.34 (Exponentielle complexe)

Soit z un nombre complexe. On définit alors $e^z = e^{\mathrm{Re}(z)} \times e^{i\,\mathrm{Im}(z)}$.

Si z est réel ou imaginaire pur, on retrouve respectivement l'exponentielle réelle et l'exponentielle définie sur les imaginaires purs.
De façon immédiate, on a les résultats suivants :

Proposition 7.2.35 (Parties réelle, imaginaire, module et argument de e^z)

(i) $\mathrm{Re}(e^z) = e^{\mathrm{Re}(z)} \cos(\mathrm{Im}(z))$

(ii) $\mathrm{Im}(e^z) = e^{\mathrm{Re}(z)} \sin(\mathrm{Im}(z))$

(iii) $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$

(iv) $\arg(e^z) \equiv \mathrm{Im}(z)\ [2\pi]$

Théorème 7.2.36 (propriété fondamentale de l'exponentielle)

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. *Alors* $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.

Proposition 7.2.37 (cas d'égalité)
Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. On a $e^z = e^{z'}$ si et seulement si $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z) \equiv \mathrm{Im}(z') \mod 2\pi$, autrement dit ssi $z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$.

Proposition 7.2.38 (recherche de l'image réciproque)
Soit $a \in \mathbb{C}$. Alors :
- *si $a = 0$, l'équation $e^z = a$ n'a pas de solution ;*
- *si $a \neq 0$, l'équation $e^z = a$ a une infinité de solutions, décrites par :*

$$\mathrm{Re}(z) = \ln|a| \qquad et \qquad \mathrm{Im}(z) \equiv \arg(a) \mod 2\pi.$$

III Racines d'un nombre complexe

III.1 Racines n-ièmes

Définition 7.3.1 (racines n-ièmes, groupe $\mathbb{U}_n$)
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$. Une racine n-ième de z est une racine (complexe) du polynôme $X^n - z$, donc un nombre complexe ω tel que $\omega^n = z$
- Une racine n-ième de l'unité est une racine n-ième de 1.
- L'ensemble des racines n-ièmes de l'unité est noté $\mathbb{U}_n$.

Nous verrons plus tard que cet ensemble $\mathbb{U}_n$ possède une structure de *groupe* (notion définie plus tard).

Proposition 7.3.2 (Explicitation des racines de l'unité)
Le groupe $\mathbb{U}_n$ des racines n-ièmes de l'unité est constitué de n éléments deux à deux distincts et donnés par :

$$\mathbb{U}_n = \{\omega_k = e^{i\frac{2\pi k}{n}}, k \in [\![0, n-1]\!]\}.$$

◁ **Éléments de preuve.**
Les racines de 1 sont de module 1. On peut donc les rechercher sous la forme $e^{i\theta}$. Résoudre $e^{in\theta} = 1$.
▷

Ces racines se répartissent de façon régulière sur le cercle trigonométrique, de façon à former les sommets d'un polygône régulier à n côtés (figure 7.3)

Proposition 7.3.3 (racines n-ièmes de z, figure 7.4)
Soit $z = re^{i\theta}$ un nombre complexe. Alors :

(i) Une racine n-ième particulière de z est $z_0 = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\theta}{n}}$

(ii) z possède exactement n racines n ièmes, données par :

$$\xi_k = z_0\omega, \quad \omega \in \mathbb{U}_n,$$

où $\omega_0, \ldots, \omega_{n-1}$ sont les racines n-ièmes de l'unité.

(iii) Ainsi, pour $z = re^{i\theta}$, on obtient la description explicite des racines n-ièmes :

$$\xi_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}, \quad k \in [\![0, n-1]\!].$$

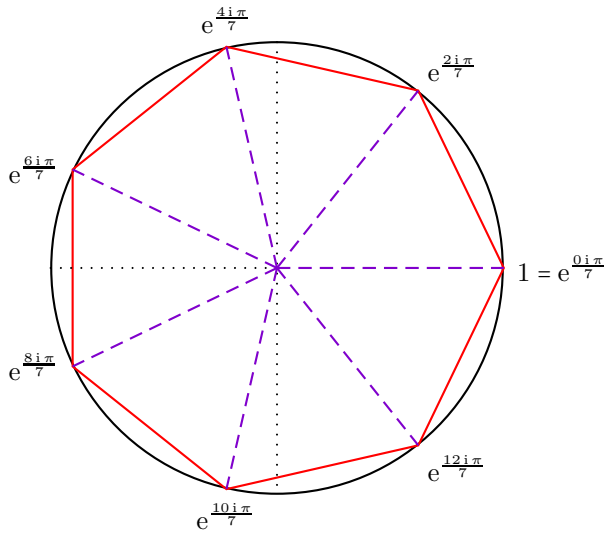


Figure 7.3 – Répartition des racines de l'unité sur le cercle trigonométrique

◁ **Éléments de preuve.**

De même, rechercher les racines sous la forme $\rho e^{i\varphi}$. ▷

Proposition 7.3.4

Soit $\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}$. *Alors* $\sum_{i=0}^{n-1} \omega^i = 0$.

◁ **Éléments de preuve.**

Formule de sommation des suites géométriques. ▷

En particulier, puisque pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\omega_k = \omega_1^k$, on obtient :

Corollaire 7.3.5 (somme des racines n-ièmes de l'unité, HP, savoir refaire)

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. *Alors* $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = 0$

Corollaire 7.3.6 (somme des racines n-ièmes de z, HP, idem)

Soit $n \geqslant 2$, *et* $\{\xi_0, \dots, \xi_{n-1}\}$ *l'ensemble des racines n-ièmes de* z, *alors* $\sum_{k=0}^{n-1} \xi_k = 0$.

Remarque 7.3.7

Ce résultat est un cas particulier des relations entre coefficients et racines d'un polynôme.

Notation 7.3.8 (Le complexe j)

On note j la racine cubique de l'unité $j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Les racines cubiques de 1 sont donc $1, j$ et j^2.

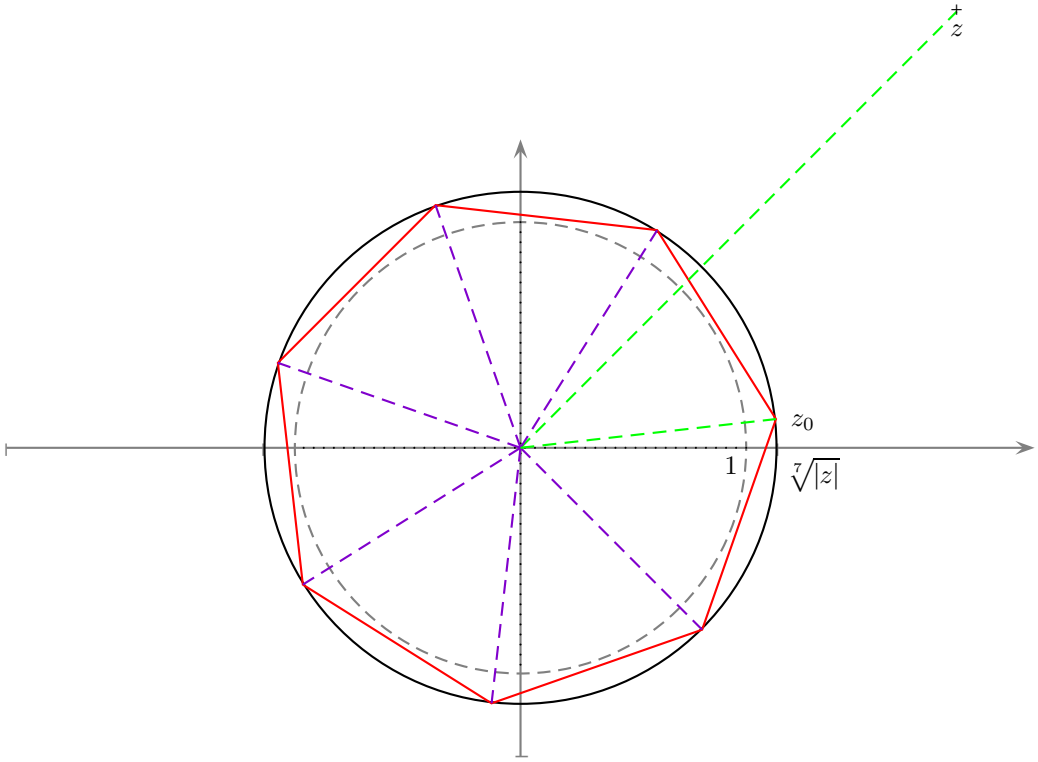


FIGURE 7.4 – Répartition des racines de z dans le plan complexe

Proposition 7.3.9 (Propriétés de j)

(i) $\mathrm{j}^3 = 1$, *donc* $\mathrm{j}^n = \mathrm{j}^r$, *où* r *est le reste de la division de* n *par* 3

(ii) $\overline{\mathrm{j}} = \mathrm{j}^2$

(iii) $\mathrm{j}^2 + \mathrm{j} + 1 = 0$

◁ **Éléments de preuve.**

Le point (ii) provient de $\mathrm{j}\,\overline{\mathrm{j}} = 1$ ▷

On peut également décrire les racines 6-ièmes de 1 à l'aide de j

Proposition 7.3.10 (racines 6-ièmes de 1)

Les racines 6-ièmes de 1 sont, par ordre croissant d'arguments positifs : $1, -\mathrm{j}^2, \mathrm{j}, -1, \mathrm{j}^2, -\mathrm{j}$.

III.2 Cas des racines carrées : expression sous forme algébrique

Les racines carrées z peuvent être obtenues par la méthode général décrite ci-dessus, lorsqu'on connaît z sous forme trigonométrique : Si $z = re^{\mathrm{i}\,\theta}$, z possède deux racines carrées :

$$z_1 = \sqrt{r}e^{\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}} \qquad \text{et} \qquad z_2 = -\sqrt{r}e^{\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}}.$$

Dans le cas particulier des racines carrées, on dispose également d'une méthode permettant d'obtenir facilement l'expression algébrique des racines carrées de z lorsque z est donné lui-même sous forme algébrique.

Méthode 7.3.11 (recherche des racines carrées sous forme algébrique)

Soit $z = a + \mathrm{i}\,b$ un nombre complexe sous forme algébrique ($a, b \in \mathbb{R}$). Pour trouver les racines carrées sous forme algébrique :

1. Considérer une racine $z' = c + \mathrm{i}\,d$
2. Identifier les parties imaginaires et réelles dans l'égalité $(z')^2 = z$: en retenir essentiellement la valeur de $c^2 - d^2$ et le signe de cd.
3. Donner l'égalité des modules de $(z')^4$ et de z^2. Cela donne la valeur de $c^2 + d^2$.
4. Résoudre le système en c^2 et d^2 donné par les équations ci-dessus.
5. Des quatre solutions pour le couple (c, d), garder les deux seules qui donnent le bon signe de cd.

On peut aussi s'en sortir sans utiliser l'égalité des modules, en constatant que l'étape 2 donne la valeur de la somme et du produit de c^2 et $-d^2$, donc une équation du second degré dont ces réels sont les solutions.

Exemple 7.3.12

1. Rechercher les racines carrées de $3 + 5\,\mathrm{i}$.
2. Trouver les solutions de l'équation du second degré : $(2 + \mathrm{i})z^2 - \mathrm{i}\,z + 1 = 0$

Remarque 7.3.13

Justifier que la méthode de résolution des équations du second degré reste valide dans $\mathbb{C}$.

La méthode de résolution ci-dessus montre que les racines (réelles ou complexes) d'un polynôme de degré 2 peuvent être exprimées à l'aide de radicaux (*i.e.* les parties réelles et imaginaires peuvent être exprimées à l'aide des 4 opérations usuelles à partir des nombres rationnels, des coefficients de l'équation, et des fonctions « racine » définies sur $\mathbb{R}_+$, ici la racine carrée).

Note Historique 7.3.14

- La résolution d'équations polynomiales par radicaux a motivé une part importante de la recherche mathématique, jusqu'à ce que Niels Abel prouve l'impossibilité de résoudre l'équation général du 5-ième degré par radicaux. Peu de temps après, Évariste Galois élucide complètement le problème, dans un mémoire rédigé peu avant sa mort prématurée en 1832, et dans une lettre rédigée à la hâte à un ami, la veille du duel qui devait lui être fatal (il avait alors 20 ans). Dans ce mémoire, on y trouve en particulier les balbutiements de la théorie des groupes.
- Carl Friedrich Gauss montre que les racines de $X^n - 1$ (donc les racines n-ièmes de l'unité), peuvent s'exprimer par radicaux si n est premier.
- Il va plus loin, en montrant que si n est un entier premier de la forme $2^{2^k} + 1$, alors les solutions peuvent s'exprimer sous forme de radicaux carrés. Ce résultat amène la constructibilité à la règle et au compas du pentagone (déjà connu depuis bien longtemps), de l'heptadécagone, *i.e.* le polygone à 17 côtés (Gauss en donne une construction) puis des polygônes à 257 et 65537 côtés. On ne connaît pas à ce jour d'autre nombre premier de la forme $2^{2^k} + 1$ (nombres de Fermat). On ne sait pas s'il y en a d'autres.
- Pierre-Laurent Wantzel montre la réciproque en 1837 : les seuls polygônes constructibles sont les polygônes dont le nombre de côtés est un nombre premier de la forme $2^{2^k} + 1$, ou des nombres ayant comme uniques facteurs (qui doivent être simples) ces nombres premiers ou 2 (en multiplicité quelconque). Ce théorème est connu sous le nom de théorème de Gauss-Wantzel.

IV Nombres complexes et géométrie

IV.1 Affixes

Nous terminons cette étude des nombres complexes par un bref aperçu de l'efficacité de l'utilisation des nombres complexes pour l'étude de la géométrie du plan. Nous rappelons que, par la construction que nous avons donnée, $\mathbb{C}$ s'identifie au plan $\mathbb{R}^2$. Nous rappelons :

Définition 7.4.1 (affixe)

1. L'affixe d'un point $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ est le complexe $z_A = a + \mathrm{i}\,b$.
2. L'affixe d'un vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ est le complexe $z_{\overrightarrow{u}} = a + \mathrm{i}\,b$.

On commence par traduire sous forme complexe certaines propriétés géométriques :

Proposition 7.4.2 (affixe d'un vecteur défini par un bipoint)

Soit A et B deux points d'affixe z_A et z_B. Alors $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$

Proposition 7.4.3 (norme d'un vecteur)

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$ d'affixe $z_{\overrightarrow{u}}$. Alors $\|\overrightarrow{u}\| = |z_{\overrightarrow{u}}|$.

IV.2 Alignement, orthogonalité, angles

Proposition 7.4.4 (interprétation géométrique de $\frac{b-a}{c-a}$.)

Soit a, b et c trois complexes, et A, B et C les points de $\mathbb{R}^2$ d'affixe a, b et c. Alors

$$\arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$$

◁ **Éléments de preuve.**

L'écrire en notation trigonométrique. ▷

Proposition 7.4.5 (caractérisation de l'alignement et de l'orthogonalité)

Soit A, B et C trois points distincts, d'affixes a, b et c. Alors :

1. *A, B et C sont alignés si et seulement si $\frac{b-a}{c-a} \in \mathbb{R}$*
2. *(AB) et (AC) sont perpendiculaires si et seulement si $\frac{b-a}{c-a} \in \mathrm{i}\,\mathbb{R}$.*

En multipliant par le conjugué du dénominateur, le dénominateur devient réel et on en déduit une autre caractérisation :

1. A, B et C sont alignés si et seulement si $\mathrm{Im}((b-a)(\overline{c}-\overline{a})) = 0$
2. (AB) et (AC) sont perpendiculaires si et seulement si $\mathrm{Re}((b-a)(\overline{c}-\overline{a})) = 0$.

De cette manière, on peut englober le cas dégénéré de points qui ne sont pas tous distincts.

IV.3 Transformations du plan

Enfin, les transformations usuelles du plan peuvent être traduites par des fonctions simples de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, ce qui simplifie souvent leur étude ou leur utilisation.

Proposition 7.4.6 (Interprétation complexe des transformations usuelles du plan)

1. *Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan, d'affixe z_u. La translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ correspond dans $\mathbb{C}$ à la fonction $z \mapsto z + z_u$.*
2. *Soit A un point du plan, d'affixe z_A, et θ un réel. La rotation de centre A et d'angle θ (dans le sens trigonométrique, ou direct) correspond dans $\mathbb{C}$ à la fonction $z \mapsto z_A + e^{i\theta}(z - z_A)$.*
3. *Soit A un point du plan, d'affixe z_A, et λ un réel. L'homothétie de centre A et de rapport λ correspond dans $\mathbb{C}$ à la fonction $z \mapsto z_A + \lambda(z - z_A)$.*
4. *(HP) Soit D une droite passant par le point A d'affixe z_A, et de vecteur directeur unitaire $\overrightarrow{u}$, d'affixe z_u. La symétrie orthogonale d'axe D (ou reflexion d'axe D) est donnée par la fonction $z \mapsto z_u^2(\overline{z} - \overline{z_A}) + z_A$*

◁ **Éléments de preuve.**

Si on note M le point d'affixe z et M' le point d'affixe $\varphi(z)$, en vertu des réultats précédents :

1. $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$;
2. $\|AM'\| = \|AM\|$, et l'angle entre les deux vecteurs est l'argument du quotient des affixes ;
3. $\overrightarrow{AM'} = \lambda\overrightarrow{AM}$;
4. Si θ est l'argument de z_u, faire une rotation d'angle $-\theta$ nous ramène à une symétrie d'axe horizontal, et si on translate encore de $-\overrightarrow{OA}$ cette symétrie correspond à la conjugaison. Quelle relation cela donne-t-il entre $\dfrac{z - z_A}{z_u}$ et $\dfrac{z' - z_A}{z_u}$?

▷

Exemple 7.4.7 (Cas particuliers importants)

1. La rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ se traduit par une multiplication par i. S'en souvenir dans des contextes d'orthogonalité !
2. La rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ se traduit par la multiplication par j. La rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ se traduit par la multiplication par $-\overline{j} = -j^2$. S'en souvenir dans tous les contextes faisant intervenir une symétrie d'ordre 3, notamment pour l'étude des triangles équilatéraux.
3. Quelle est l'interprétation géométrique de la conjugaison $z \mapsto \overline{z}$?

Remarquez dans le 4 qu'on a supposé que $\overrightarrow{u}$ est unitaire, donc que z_u est de la forme $e^{i\theta}$. Ainsi, la multiplication par $\overline{z_u}$ correspond à une rotation qui nous ramène à un axe horizontal. Si cet axe passe par 0, la symétrie correspond alors à la conjugaison (ce qui fait partir la barre du coefficient multiplicatif z_u).
Attention, le caractère unitaire de $\overrightarrow{u}$ est important ici.

Remarque 7.4.8 (Forme des applications associées aux transformations usuelles)

Les transformations usuelles étudiées ci-dessus s'écrivent toutes sous la forme $z \mapsto az + b$ ou $z \mapsto a\overline{z} + b$.

On montre que réciproquement une application du premier type correspond à une transformation usuelle, ou une composée de transformations usuelles du plan. On pourrait le faire pour le second type, impliquant des réflexions, mais c'est hors-programme.

Théorème 7.4.9 (Interprétation des transformations affines de $\mathbb{C}$)

Soit $\varphi : z \mapsto az + b$, $a \neq 0$. Alors :

- *Si $a = 1$, φ représente une translation ;*
- *Si $a = \lambda e^{i\theta} \neq 1$, il existe un point C tel que φ représente la composée d'une rotation d'angle θ de centre C et d'une homothétie de rapport λ de même centre C.*

◁ **Éléments de preuve.**

si $a \neq 1$, mettre sous la forme $\varphi(z) - z_C = \lambda e^{i\theta}(z - z_C)$. Cette équation détermine z_C en fonction de a et b. ▷

Méthode 7.4.10

Il faut savoir refaire ce calcul dans des situations concrètes explicites.

Définition 7.4.11 (isométries et similitudes)

Soit $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une application.

1. On dit que F est une isométrie affine si F conserve les longueurs, donc si pour tout $(A, B) \in (\mathbb{R}^2)^2$, $\|F(A)F(B)\| = \|AB\|$. Cela se traduit par une application $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ vérifiant $|\varphi(z_2) - \varphi(z_1)| = |z_2 - z_1|$ pour tous z_1 et z_2.
2. On dit que F est une isométrie vectorielle si F est une isométrie affine telle que $F(O) = O$, où $O = (0, 0)$.
3. On dit que F est une similitude affine s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $(A, B) \in (\mathbb{R}^2)^2$, $\|f(A)f(B)\| = \lambda\|AB\|$, ce qui se traduit par $|\varphi(z_2) - \varphi(z_1)| = \lambda|z_2 - z_1|$
4. On dit que F est une similitude vectorielle si F est une similitude affine telle que $F(O) = O$.

Théorème 7.4.12 (Les $z \mapsto az + b$ ou $a\overline{z} + b$ sont des similitudes)

Les applications $z \mapsto az + b$ et $z \mapsto a\overline{z} + b$ correspondent à des similitudes, qui sont des isométries si de plus $|a| = 1$

◁ **Éléments de preuve.**

On peut facilement en faire une preuve directe. ▷

En particulier, les transformations du plan sont des similitudes : les translations, rotations sont des isométries directes, les réflexions sont des isométries indirectes, les homothétie sont des isométries, directes ou indirectes suivant le signe de leur rapport.
On peut montrer que réciproquement, toute similitude s'écrit sous la forme $z \mapsto az + b$ ou $z \mapsto a\overline{z} + b$ (HP).

IV.4 Caractérisation de certains objets géométriques

Proposition 7.4.13 (Caractérisation des droites)

La droite passant par A d'affixe a et B d'affixe b est l'ensemble constitué des points M d'affixe z tels que l'une des propriétés équivalentes suivantes soit vérifiée :

(i) *il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $z = (1 - t)a + tb$*

(ii) *$z = a$, ou $z \neq a$ et $\arg(z - a) \equiv \arg(b - a)\ [\pi]$*

(iii) $\dfrac{z - a}{b - a} \in \mathbb{R}$.

◁ **Éléments de preuve.**
Exprimer la colinéarité de $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$. ▷

Proposition 7.4.14 (Caractérisation des cercles)

Un sous-ensemble C de $\mathbb{C}$ est un cercle éventuellement vide si et seulement si il existe un complexe α et un réel β tels que C soit l'ensemble des points d'affixe z vérifiant :

$$z \cdot \overline{z} + \alpha z + \overline{\alpha} \cdot \overline{z} + \beta = 0.$$

L'ensemble C est dans ce cas non vide si et seulement si $\beta \leqslant \alpha\overline{\alpha}$ et dans ce cas, son centre est le point d'affixe $-\overline{\alpha}$ et son rayon est $r = \sqrt{\alpha\overline{\alpha} - \beta}$.

◁ **Éléments de preuve.**
Écrire cette équation sous la forme $(z + \overline{\alpha})(\overline{z} + \alpha) = \rho$. ▷

Méthode 7.4.15

Il est inutile de retenir l'expression de l'affixe du centre et du rayon. Il faut en revanche être capable de les retrouver rapidement en faisant la factorisation précédente.