Chapitre 3 - Diagonalisation d'une matrice

Mathématiques (Université Paris II Panthéon-Assas)

Mathématiques Appliquées aux S.E.S.
Licence 2ème année - Joël Gaden
Chapitre 3

DIAGONALISATION D'UNE MATRICE

I. Matrice diagonale

1. Définition

Une matrice "diagonale" est une matrice carrée dont tous les éléments hors diagonale sont obligatoirement nuls SANS QUE les éléments de la diagonale le soient.

A $= (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ **diagonale**

SSI $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = diag\,(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$

2. Intérêt

Simplicité des calculs avec les matrices diagonales car:

α) $\det A = \prod_{i=1}^{i=n} a_{ii} = a_{11}.a_{22}\dots a_{nn} =$ **produit des termes diagonaux**

β) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1/a_{nn} \end{pmatrix}$ **Il suffit d'inverser les termes diagonaux de A**.

3. Exemple

Si $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ **alors** $\boxed{detA = (-1)(2)(3) = -6}$

avec $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}}$

4. But

Si une matrice carrée apparait dans un calcul

alors nous chercherons, **par un changement de base**, **à la**

transformer en une matrice diagonale.

.

II. Matrice diagonalisable

1. Définition

Une matrice carrée A est diagonalisable s'il existe

$*$ **une matrice carrée P inversible**

$*$ **une matrice carrée diagonale D**

telles que: $\boxed{A = PDP^{-1} \ ou \ AP = PD \ ou \ D = P^{-1}AP}$

2. Conséquences

α) **On dit que la matrice A est <u>semblable</u> à la matrice**

diagonale D puisque $AP = PD$

β) **La matrice P s'écrit avec les vecteurs colonnes** $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$

$\gamma)$ **la matrice D s'écrit** $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & .. & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

δ) $AP = (AP_1, AP_2, \dots, AP_n)$ et $PD = (\lambda_1 P_1, \lambda_2 P_2, \dots, \lambda_n P_n)$

ϵ) **Il faut que les n égalités** $AP_i = \lambda_i P_i$ **soient toutes vérifiées**.

3. Théorème

Une matrice carrée A d'ordre n est diagonalisable
S.S.I.
il existe n vecteurs $P_1, P_2, \dots, P_n$ **linéairement indépendants de** $\mathbf{R}^n$

et n nombres réels notés $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ **tels que**:

$\boxed{AP_i = \lambda_i P_i \text{ pour tout i de 1 à n}}$

4. Remarque

Les n vecteurs $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, ..., \mathbf{P}_n$ **sont des vecteurs linéairement indépendants**

de $\mathbf{R}^n$ **forment donc ils forment obligatoirement une base de** $\mathbf{R}^n$.

III. Valeurs et vecteurs propres

1. Définition

Soit A une matrice carrée d'ordre n.

Un nombre réel λ **est appelé valeur propre de A**

s'il existe un vecteur non nul de $\mathbf{R}^n$ **noté** $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

vérifiant l'égalité matricielle: $\boxed{AX = \lambda X \text{ ou encore } (A - \lambda I_n)X = O_n}$

en effet:

$\boxed{\mathbf{AX = \lambda X \Leftrightarrow AX - \lambda X = O}_n \Leftrightarrow \mathbf{(A - \lambda I}_n\mathbf{)X = O}_n}$

2. Comment rechercher les valeurs propres ?

α) Il faut résoudre le système d'équations équivalent à l'équation

matricielle: $\boxed{(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n)\mathbf{X} = \mathbf{O}_n}$

β) Ce système homogène admet au moins la solution nulle (**0**,**0**,...,**0**)

MAIS il peut en plus admettre des solutions X non nulles....

γ) **Ce système homogène admet en plus des solutions X <u>non nulles</u>**

SSI la matrice des coefficients $(A - \lambda I_n)$ **n'est pas inversible**...

Cela revient à dire plus clairement:
<< le système homogène admet des solutions non nulles SSI le déterminant de

la matrice des coefficients est nul >>

δ) On en déduit qu'il faut résoudre l'équation matricielle

det$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n) = \mathbf{0}$ **que l'on appelle "équation caractéristique"**

3. Méthode pratique de recherche des valeurs propres

Les étapes successives de calculs sont toujours:

<u>1ère étape</u>) **écrire la matrice** $A - \lambda I_n$

<u>2ème étape</u>) **calculer le déterminant det**$(A - \lambda I_n)$.
C'est le polynôme P$_A(\lambda)$ **associé à la matrice A**
et appelé polynôme caractéristique.
<u>3ème étape</u>) **rechercher les racines de ce polynôme qui seront**
appelées valeurs propres de la matrice A.

4. Conséquence importante

Si la matrice carrée A est d'ordre n
alors il y a au maximum n valeurs propres réelles

5. Exemples

Exemple 1

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \boldsymbol{\lambda} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} 1-\lambda & 5 \\ 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}}$$

$$\det(\mathbf{A} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{I}_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 5 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\times(3-\lambda) - 0 \times 5 = \boxed{(1-\lambda)(3-\lambda)}$$

$$(\mathbf{1} - \boldsymbol{\lambda})(\mathbf{3} - \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\lambda = 0 \\ ou \\ 3-\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ ou \\ \lambda = 3 \end{cases}$$

$$\boxed{\textbf{Il ya donc deux valeurs propres } \lambda_1 = 1 \ et \ \lambda_2 = 3}$$

Exemple 2

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 21 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 5-\lambda & 1 \\ 21 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{I}_2) = \boxed{(\mathbf{5} - \boldsymbol{\lambda})(\mathbf{1} - \boldsymbol{\lambda}) - \mathbf{21}}$$

Il est préférable de développer pour pouvoir calculer ensuite les racines...

$$\det(\mathbf{A} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{I}_2) = \mathbf{5} - \mathbf{5}\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\lambda}^2 - \mathbf{21} = \boxed{\boldsymbol{\lambda}^2 - \mathbf{6}\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{16}}$$

or $\Delta = (-6)^2 - 4(1)(16) = 100 = 10^2$

alors $\mathbf{det}(A - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{6+10}{2} = 8 \\ ou \\ \lambda = \frac{6-10}{2} = -2 \end{cases}$

$\boxed{\text{Il ya donc deux valeurs propres } \lambda_1 = 8 \text{ et } \lambda_2 = -2}$

Exemple 3

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } \mathbf{A} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

puis $\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

développons selon la dernière ligne...

$$\mathbf{det}(A - \lambda I_3) = (1-\lambda)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)[(1-\lambda)(1-\lambda) - (-1)(-1)]$$
$$= (1-\lambda)[1 - 2\lambda + \lambda^2 - 1]$$
$$= -\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

$\boxed{\text{Il y a trois valeurs propres réelles}}$ $\boxed{\lambda_1 = 0 \ ; \ \lambda_2 = 1 \ ; \ \lambda_3 = 2}$

6. Remarque (pour les IDEA L2)

Dans l'ensemble C **des nombres complexes, un polynôme de degré n admet exactement n racines**...

par exemple si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det(\mathbf{A} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{I}_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$= (\mathbf{1} - \boldsymbol{\lambda})^2 - (-\mathbf{1})(\mathbf{1}) = \boldsymbol{\lambda}^2 - \mathbf{2}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{2}$

or $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 2 = \boxed{-4 < 0}$

Le polynôme caractéristique $P_A(\lambda)$ **n'admet pas de racines réelles**

MAIS il admet deux racines complexes conjuguées:

$$\boxed{\boldsymbol{\lambda}_1 = \frac{2+2i}{2} = \mathbf{1} + \mathbf{i} \text{ et } \boldsymbol{\lambda}_2 = \frac{2-2i}{2} = \mathbf{1} - \mathbf{i} = \overline{\lambda_1}}$$

7. Méthode de recherche pratique des vecteurs propres

Pour chaque valeur propre λ_i , il faut rechercher les solutions éventuelles X

du système propre associé à l'équation matricielle propre $\boxed{(A - \lambda_i I_n)X = O.}$

Remarquons que :
α) c'est un système homogène appelé système propre car il est lié à la valeur propre λ_i .
β) il ne faut pas retenir la solution nulle car un vecteur propre n'a pas le droit d'être un vecteur nul par définition.

8. Exemple

Reprenons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$avec\ A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

qui admet les trois valeurs propres réelles $\lambda_1 = 0\ ;\ \lambda_2 = 1\ ;\ \lambda_3 = 2.$

Pour chacune, il faut résoudre le système propre associé:

$(\mathbf{A} - \boldsymbol{\lambda}_i \mathbf{I}_n)\mathbf{X} = \mathbf{O}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda_i & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda_i)x & -\ 1y & +1z & = 0 \\ -1x & +\ (1-\lambda_i)y & & = 0 \\ & & (1-\lambda_i)z & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda_i)x & -\ y & +z & = 0 \\ -x & +\ (1-\lambda_i)y & & = 0 \\ & & (1-\lambda_i)z & = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\textbf{pour } \lambda_1 = 0}$

$(\mathbf{A} - \boldsymbol{\lambda}_i \mathbf{I}_n)\mathbf{X} = \mathbf{O} \Leftrightarrow \mathbf{AX} = \mathbf{O}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ -x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ -x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = y \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

Un vecteur $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ **est un vecteur propre associé à la valeur propre 0 s'il**

admet la forme $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *qqs le réel x non nul.*

<u>Choisissons le plus simple</u> : $\boxed{\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$.

$\boxed{\textbf{pour } \lambda_2 = 1}$

$(A - \lambda_i I_n)X = O$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0x - y + z = 0 \\ -x + 0y = 0 \\ 0z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ x = 0 \\ 0z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \\ z \ \ qque\ non\ nul \end{cases}$$

Un vecteur $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ **est un vecteur propre associé à la valeur propre 0 s'il**

admet la forme $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *qqs le réel z non nul.*

Choisissons le plus simple : $\boxed{P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$.

$\boxed{\textbf{pour } \lambda_3 = 2}$:

$$(\mathbf{A} - \boldsymbol{\lambda}_i \mathbf{I}_n)\mathbf{X} = \mathbf{O} \Leftrightarrow \begin{cases} -1x & -y & +1z & = 0 \\ -1x & -1y & & = 0 \\ & & -1z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = -y \\ x & = -y \\ z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = -y \\ z & = 0 \end{cases}$$

Un vecteur X = $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ **est un vecteur propre associé à la valeur propre 0 s'il**

admet la forme $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *qqs le réel y non nul.*

Il est possible de dire aussi y = - x d'où

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \textit{ qqs le réel x non nul.}$$

Choisissons le plus simple: $\boxed{P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}$

IV. Critères de diagonalisation

1.Théorème

Une matrice carrée d'ordre n est diagonalisable s'il existe n vecteurs propres indépendants associés aux valeurs propres.

2.Remarque

Une valeur propre peut être "multiple" donc avoir autant de vecteurs propres indépendants associés que son ordre de multiplicité.

3.Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

admet les trois valeurs propres réelles distinctes $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = 2$. **Comme ce sont des valeurs propres "simples" et au nombre de trois, il y a obligatoirement 3 vecteurs propres indépendants associés.**

La matrice A est carrée d'ordre 3 et il existe une base de R^3 **formée de 3 vecteurs propres alors**:

$3\alpha)$ **la matrice A est diagonalisable.**

$3\beta)$ **la matrice A est semblable à la matrice diagonale** $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$3\gamma)$ **Il existe une matrice** $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **carrée d'ordre 3 et inversible telle que** $AP = PD$.

V. Base des vecteurs propres et matrice P de passage.

1.Théorème

Lorsque A est diagonalisable, alors:

$\alpha)$ **il existe une matrice P carrée inversible et une matrice D carrée diagonale telles que** $\boxed{AP = PD \text{ ou encore } A = PDP^{-1}}$.

$\beta)$ **Les colonnes de P sont formées des vecteurs propres**

$\gamma)$ **ces vecteurs propres en colonnes sont dans le même ordre d'écriture que les valeurs propres associées sur la diagonale de D.**

2.Exemple (suite)

* **On peut choisir d'écrire** $P = (P_1, P_2, P_3)$ *et* $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$

soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

* **Autre choix possible**:

$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

* **ou encore**:

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **etc**..

Remarquons qu'il suffit de permuter les 3 éléments, à chaque fois, de la

même manière dans P et D pour que ce soit une écriture juste.
Il y a donc $3! = 6$ **permutations possibles et différentes.**

3.Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

alors: $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$

développons selon la 1 ère colonne:

$\det(\mathbf{A} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{I}) = (\mathbf{1} - \boldsymbol{\lambda})(-\mathbf{1})^{1+1} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \boxed{(\mathbf{1} - \boldsymbol{\lambda})(\mathbf{1} - \boldsymbol{\lambda})(\mathbf{2} - \boldsymbol{\lambda})}$

Les valeurs propres sont donc $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2.$

Soit encore: $\boxed{\textbf{Spec A} = \{ \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3} \}}$

On dit que la valeur propre 1 est double et que la valeur propre 2 est simple.

$\boxed{\textbf{Pour } \lambda_1 = \lambda_2 = 1}$:

$$(\mathbf{A} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{X}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ MAIS \quad x \; et \; y \; quelconques \end{cases}$$

Cela signifie qu'il y a une <u>double indétermination</u> pour x et y.

Le sous-espace propre V_1 associé à la valeur propre λ_1 est un sous-espace

vectoriel de $\mathbf{R}^3$ donc de dimension inférieure ou égale à 3.

Cherchons une base de ce sous-espace vectoriel.

Tout vecteur propre sera de la forme :

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{y} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\mathbf{x}\,\mathbf{P}_1 + \mathbf{y}\,\mathbf{P}_2}$$

Une base de V_1 est formée des vecteurs les plus simples possibles P_1 et P_2.

Nous dirons que <u>V_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ de dimension 2</u> .

Cela se note $\boxed{\dim V_1 = 2}$.

On notera de la manière suivante:

$$\mathbf{V}_1 = Vect\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\} \ ou \ Vect\left\{\begin{pmatrix}1, & 0, & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0, & 1, & 0\end{pmatrix}\right\}$$

$\boxed{\textbf{Pour } \lambda_3 = 2}$

$$(\mathbf{A} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{X}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\0 & -1 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-x+z &= 0\\-y+z &= 0\end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{x = y = z}}$$

Cela signifie qu'il y a une seule indétermination pour z.

Le sous-espace propre $\mathbf{V}_2$ associé à la valeur propre λ_3 est donc un

sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ de dimension 1 noté $\boxed{\dim V_2 = 1}$.

En effet, **il ne peut pas être de dimension inférieure à 1** ....

Cherchons une base de ce sous-espace vectoriel.

Tout vecteur propre sera de la forme :

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}z\\z\\z\end{pmatrix} = \mathbf{z}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \mathbf{z}\,\mathbf{P}_3$$

La base la plus simple pour $\mathbf{V}_2$ est donc formée de $\mathbf{P}_3$.

Nous écrirons: $\mathbf{V}_2 = Vect\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\} = Vect\{(1,1,1)\}$ **et** $\dim V_2 = 1$

$\boxed{\textbf{Conséquences}}$:

α) <u>**Comme la matrice A est carrée d'ordre 3, qu'elle admet 3 vecteurs propres**</u>

indépendants, alors elle est diagonalisable.

β) **Les 3 vecteurs propres constituent une nouvelle base de l'e.v. $\mathbf{R}^3$**.
γ) **On peut écrire**:

$$\mathbf{AP} = \mathbf{PD} \Leftrightarrow \mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3δ) **De plus, la matrice P est obligatoirement inversible**.

On obtient alors:

$$\mathbf{AP} = \mathbf{PD} \Leftrightarrow \mathbf{APP}^{-1} = \mathbf{PDP}^{-1} \Leftrightarrow \mathbf{AI} = \mathbf{PDP}^{-1} \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}}$$

Mais également:

$$\mathbf{AP} = \mathbf{PD} \Leftrightarrow \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{PD} \Leftrightarrow \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{ID} \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{D}}$$

4. Théorème

Une matrice A carrée d'ordre n est diagonalisable

S.S.I. : $\boxed{\sum_i \dim \mathbf{V}(\lambda_i) = \dim R^n = n = ordre\ de\ A}$

5.Exemple (suite)

Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **carrée d'ordre 3**

nous avons trouvé: $\dim V_1 = 2$ **et** $\dim V_2 = 1$

alors $\boxed{\dim V_1 + \dim V_2 = 2 + 1 = 3 = \dim R^3 = ordre\ de\ A}$

6.Exemple

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

admet les valeurs propres $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$ $(double)$ et $\lambda_3 = 3$ $(simple)$

$\mathbf{V}_{(-3)} = Vect\{\,(1,1,1)\,;\,(1,0,-1)\,\}$ **et** $V_{(3)} = Vect\{\,(1,-2,1)\,\}$

$\dim \mathbf{V}_{(-3)} + \dim V_{(3)} = 2+1 = 3 = \dim R^3 = ordre\ de\ A$

A est donc diagonalisable avec par exemple:

$$\mathbf{AP} = \mathbf{PD} \Leftrightarrow \mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

7. Théorème

Une matrice carrée A d'ordre n possédant n valeurs propres distinctes

est obligatoirement diagonalisable.

(**en effet**, **ces n valeurs propres distinctes sont associées à n vecteurs propres**

indépendants...)

8.Exemple

Comme les calculs précédents l'ont montré:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

admet les trois valeurs propres réelles " simples" et distinctes

$\boxed{\lambda_1 = 0\ ;\ \lambda_2 = 1\ ;\ \lambda_3 = 2}$.

Comme elles sont simples et au nombre de trois, **la matrice A est**

obligatoirement diagonalisable.

Nous avons choisi la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

VI. Matrice réelle symétrique

1.Théorème

Une matrice carrée A d'ordre n est symétrique si et seulement si A = ^{t}**A. Elle est alors obligatoirement diagonalisable et ses valeurs propres sont réelles**.

2.Remarque

Cela est très utile pour les matrices hessiennes dans l'optimisation...

3.Exemple

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 5/2 \end{pmatrix}$ **est symétrique dons diagonalisable**.

Or: $\boxed{\det(A - \lambda I) = 0 = \lambda(\frac{5}{2} - \lambda)(\lambda - \frac{5}{2})}$

Les valeurs propres sont donc réelles égales à 0 "simple" et $\frac{5}{2}$ **"double"**

On peut associer :

α) **le vecteur propre** $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ **à la valeur propre "0"**.

β) **les vecteurs** $P_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *et* $P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ **à la valeur propre** "$\frac{5}{2}$"

On vérifie bien que:

$$\boxed{\textbf{ordre de A} = \mathbf{3} = \dim \mathbf{R}^n = \dim \mathbf{V}_{(0)} + \dim \mathbf{V}_{(5/2)}}$$

ainsi que $AP = PD$ **avec** $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 5/2 \end{pmatrix}$

VII. Quelques applications de la diagonalisation

1. Calcul de la puissance k-ième d'une matrice diagonalisable

Lorsque A matrice carrée d'ordre n est diagonalisable

nous avons une matrice P carrée inversible et une matrice D carrée diagonale

telles que:

$\mathbf{AP = PD \Leftrightarrow APP^{-1} = PDP^{-1} \Leftrightarrow AI_{\mathit{n}} = PDP^{-1} \Leftrightarrow A = PDP^{-1}}$

Nous pouvons élever à la puissance k la matrice A car elle est carrée: **il n'y a**

pas d'incompatibilité de format...

Alors:

$A^k = A \times A \times A \times \ldots \times A$ **avec k facteurs "A"**

$A^k = (PDP^{-1}) \times (PDP^{-1}) \times (PDP^{-1}) \times \ldots \times (PDP^{-1})$ **avec k facteurs** "PDP^{-1}"

$A^k = PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P)D(P^{-1}P) \times \ldots \times (P^{-1}P)DP^{-1}$ **avec k facteurs** "$(P^{-1}P)$"

$\mathbf{A}^k = \mathbf{PDIDIDI\ldots\ldots IDP^{-1}}$

$A^k = PDDD\ldots DP^{-1}$ **avec k facteurs "D"**

soit $\boxed{\mathbf{A}^k = \mathbf{P\,D}^k\,\mathbf{P}^{-1} \text{ avec } \mathbf{k} \in \mathbf{N}}$

et $D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ * & * & * & * & 0 \\ 0 & * & * & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

DE PLUS, lorsque A est inversible, on obtient la même relation

pour une puissance entière relative

$\boxed{\mathbf{A}^{-k} = \mathbf{P}\mathbf{D}^{-k}\mathbf{P}^{-1} \text{ avec } \mathbf{k} \in \mathbf{N}}$

et en particulier $\boxed{\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{P}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{P}^{-1}}$

2. Exemple

A $= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Le spectre de A est formé des valeurs propres soit $Spec\ A = \{-2; 1\}$.

Les valeurs propres sont réelles, distinctes, au nombre de deux comme l'ordre

de A donc la mtrice A est diagonalisable.

On trouve:

$\boxed{\mathbf{V}_{(1)} = \mathbf{Vect}\ ((\mathbf{1};\mathbf{1})) \text{ et } \mathbf{V}_{(-2)} = \mathbf{Vect}\ ((-\mathbf{2};\mathbf{1}))}$

A est alors semblable à la matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ **avec** $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

On calcule alors $\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ **par la méthode que l'on veut** (!)

Nous pouvons ensuite écrire que:

$$\mathbf{D}^k = \begin{pmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & (-2)^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-2)^k \end{pmatrix}$$

d'où: $\mathbf{A}^k = \mathbf{P}\mathbf{D}^k\mathbf{P}^{-1}$

$$\mathbf{A}^k = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-2)^k \end{pmatrix} \times \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^k = \begin{pmatrix} 1 & (-2)(-2)^k \\ 1 & (-2)^k \end{pmatrix} \times \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^k = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & (-2)^{k+1} \\ 1 & (-2)^k \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

alors:

$$\boxed{\mathbf{A}^k = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1-(-2)^{k+1} & 2+(-2)^{k+1} \\ 1-(-2)^k & 2+(-2)^k \end{pmatrix}}$$

De plus, **comme** $\det A = -2 \neq 0$, **la matrice A est inversible**. **La formule précédente est donc vraie pour toute puissance d'ordre k entier relatif**.

De plus: $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1-(-2)^{-1+1} & 2+(-2)^{-1+1} \\ 1-(-2)^{-1} & 2+(-2)^{-1} \end{pmatrix}$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1-(-2)^0 & 2+(-2)^0 \\ 1-(-2)^{-1} & 2+(-2)^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1-1 & 2+1 \\ 1-(-1/2) & 2+(-1/2) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

soit:

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}}$$

3.Calcul du déterminant d'une matrice A diagonalisable

Comme A est diagonalisable, on a :

$$\mathbf{AP} = \mathbf{PD} \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$$

alors, par associativité de la multiplication dans les réels:

$$\boxed{\det A = \det(PDP^{-1}) = (\det P)(\det D)(\det P^{-1}) = (\det P)(\det P^{-1})(\det D)}$$

mais: $\boxed{(\det \mathbf{P})(\det \mathbf{P}^{-1}) = (\det \mathbf{P})(\frac{1}{\det P}) = \mathbf{1}}$

donc: $\boxed{\det A = \det D = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_n = \prod_{i=1}^{i=n} \lambda_i}$

VIII. Théorème de CAYLEY-HAMILTON

1.Théorème

Si A est une matrice carrée diagonalisable associée au polynôme

caractéristique $P_A(\lambda)$ **alors A vérifie l'équation caractéristique**

ce qui donne $P_A(A) = 0$
Il faut alors remplacer:

$\alpha)$ **λ par A**

$\beta)$ **les λ^k par $\mathbf{A}^k$**

$\gamma)$ **la constante réelle c par la matrice $\mathbf{cI}_n$ dans le polynôme caractéristique** $P_A(\lambda)$.

2.Exemple

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique est $P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda$

L'équation caractéristique est $P_A(\lambda) = 0 \ soit \ \boxed{-\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda = 0}$

Elle est vérifiée par la matrice A donc:

$$\mathbf{P}_A(\mathbf{A}) = \mathbf{0} \text{ ou encore } \boxed{-\mathbf{A}^3 + 3\mathbf{A}^2 - 2\mathbf{A} = \mathbf{O}_n}$$

Nous pouvons alors obtenir:

$$-\mathbf{A}^3 + 3\mathbf{A}^2 - 2\mathbf{A} = \mathbf{O}_n \Leftrightarrow \mathbf{A}(-\mathbf{A}^2 + 3\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) = \mathbf{O}_n$$

Mais cependant, faites ATTENTION:

un produit de matrices peut être nul sans que l'une des matrices soit nulle.

L'égalité précédente ne signifie pas que A est nulle...et pour cause ! ! !

3.Calcul de la puissance de A ou, si elle existe de $\mathbf{A}^{-1}$

Le théorème peut également servir lorsque A est diagonalisable...

Voyons cela sur la suite de l'exemple précédent.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d'après le théorème de Cayley-Hamilton: $\boxed{\mathbf{P}_A(\mathbf{A}) = -\mathbf{A}^3+3\mathbf{A}^2-2\mathbf{A}}$

α) **Considérons** $P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda$ **et utilisons le pour diviser** λ^k

Par définition de la division polynômiale, le dividende est de degré "3"

alors le reste est de degré inférieur donc au maximum "2".

soit $\boxed{\lambda^k = (-\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda)Q(\lambda) + a\lambda^2 + b\lambda + c}$

β) **Il faut déterminer** $Q(\lambda),\ a,\ b,\ c$ **par la division euclidienne**

OU bien en donnant à λ **les différentes valeurs simples**

qui annulent le polynôme caractéristique.

Comme les valeurs propres 0, 1, 2 annulent $P_A(\lambda)$.

Utilisons les pour obtenir le système: $\begin{cases} 0 = c \\ 1 = a + b + c \\ 2^k = 4a + 2b + c \end{cases}$

La solution est:

$$\boxed{a = 2^{k+1} - 1\ ;\ b = -2^{k-1} + 2\ ;\ c = 0}$$

Nous pouvons alors écrire que:

$$\lambda^k = (-\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda)Q(\lambda) + (2^{k+1} - 1)\lambda^2 + (-2^{k-1} + 2)\lambda$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda}^k = \mathbf{P}_A(\boldsymbol{\lambda}) \times \mathbf{Q}(\boldsymbol{\lambda}) + (\mathbf{2}^{k+1}-\mathbf{1})\boldsymbol{\lambda}^2+(-\mathbf{2}^{k-1}+\mathbf{2})\boldsymbol{\lambda}$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, la matrice A annule $P_A(\lambda)$, alors:

$\mathbf{A}^k = \mathbf{P}_A(\mathbf{A}) \times \mathbf{Q}(\mathbf{A}) + (\mathbf{2}^{k+1} - \mathbf{1})\mathbf{A}^2 + (-\mathbf{2}^{k-1} + \mathbf{2})\mathbf{A}$

ou encore $\boxed{A^k = (2^{k+1} - 1)A^2 + (-2^{k-1} + 2)A}$

Il est possible alors de calculer par exemple:

$\mathbf{A}^3 = (\mathbf{2}^{3+1} - \mathbf{1})\mathbf{A}^2 + (-\mathbf{2}^{3-1} + \mathbf{2})\mathbf{A} = \mathbf{3A}^2 - \mathbf{2A}$

ou toute autre puissance de A à partir des seules matrices A et A^2.