المدرسة العليا للاقتصاد وهران
Ecole Supérieure d'Économie d'Oran

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
People's Democratic Republic of Algeria
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministry of Higher Education and Scientific Research
المدرسة العليا للاقتصاد بوهـــران
Higher School of Economics of Oran

Intégrales Impropres
Exercices avec solutions

Deuxième année des classes préparatoires

Élaboré par :

M Naceri Mostepha, Maitre de conférences B, ESE Oran, nacerimostepha@yahoo.fr

Avis favorable

الأستاذ: بن شيخ هواري
رئيس المجلس العلمي
للمدرسة العليا للاقتصاد بوهران

Support de cours du Module Analyse Mathématiques

Naceri Mostepha

02/07/2020

Introduction

Notre polycopié est un ensemble des exercices avec solution qui s'adresse aux étudiants de la deuxième année de l'école supérieure de l'économie, en vue de préparation du concours national d'accès aux écoles supérieures à titre d'exemple l'ESE d'Oran, l'ENS d'Alger.

Dans ce polycopié on traite seulement le chapitre des intégrales impropres. On donne une séries d'exercices d'apprentissage et des exercices des concours passés, pour aide les étudiants à préparer et avoir une idée sur le concours national.

Vu le programme proposé par le ministère, j'ai étudié les points essentiels : **Intégrale impropre sur un intervalle semi-ouvert, Propriétés des intégrales impropres, Intégrales impropres de fonctions positives (règles de comparaison et des équivalents), Intégrales impropres de fonctions de signe quelconque (convergence absolue changement de variable).**

Finalement, j'espère que ce polycopié peut aider les étudiants qui veulent bien maîtriser bien cette partie de programme d'analyse

Chapitre 1

Intégrales Impropres Exercices et Solutions

1.1 Exercice

Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Alors $\int_0^1 t^\alpha dt$ est une intégrale impropre.

1. vrai
2. faux

Solution

1. vrai

Car pour tout $\alpha \in \mathbf{R}_-^*$: $f(t) = t^\alpha$ est continue sur $]0,1]$

1.2 Exercice

Soit f continue sur $]0,1]$. Donner la définition de $\int_0^1 f(t)$ dt converge.

Solution

Par définition

$$\int_0^1 f(t)dt = \lim_{t \longrightarrow 0} \int_t^1 f(x)dx = l_1 \in \mathbf{R}$$

1.3 Exercice

Soit f continue sur $[1,+\infty[$. Donner la définition de $\int_1^{+\infty} f(t)$ dt converge.

Solution Par définition

$$\int_1^{+\infty} f(t)dt = \lim_{t \longrightarrow +\infty} \int_1^t f(x)dx = l_2 \in \mathbf{R}$$

1.4 Exercice

Soit f continue sur $]0,+\infty[$. Donner la définition de $\int_0^{+\infty} f(t)$ dt converge.

Solution

Par définition

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt + \int_1^{+\infty} f(t)dt = l_1 + l_2 \in \mathbf{R}$$

1.5 Exercice

Soit f continue sur $]-\infty,+\infty[$. Donner la définition de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)$ dt converge.

Solution

Par définition

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{c} f(t)dt + \int_c^{+\infty} f(t)dt = l^{'} + l^{''} \in \mathbf{R}$$

1.6 Exercice

Soit f continue sur $]2,5]$. Donner la définition de $\int_2^5 f(t)$ dt diverge.

Solution

$$\int_2^5 f(t)dt = \lim_{t \longrightarrow 2} \int_t^5 f(x)dx = \pm\infty, \quad \textbf{où limite n'existe pas}$$

1.7 Exercice

Soit f continue sur $[0,+\infty[$. Donner la définition de $\int_0^{+\infty} f(t)$ dt diverge.

Solution

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt = \lim_{t \longrightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f(x)dx = \pm\infty, \quad \textbf{où limite n'existe pas}$$

1.8 Exercice

Soit f continue sur $[0,+\infty[$ quelconque telle que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge. Alors $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$

1. vrai
2. faux

Solution

1. faux

1.9 Exercice

Soit f continue sur $[0, +\infty[$ quelconque telle que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge. Alors f bornée au voisinage de $+\infty$

1. vrai
2. faux

Solution

1. faux

1.10 Exercice

1. $\forall \alpha > 1,\quad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge
2. $\forall \alpha < 1,\quad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge
3. $\forall \alpha \in \mathbf{R},\quad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ diverge
4. $\forall \alpha \in \mathbf{R},\quad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge
5. rien de ce qui précède

Solution

$$3. \quad \forall \alpha \in \mathbf{R}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \quad diverge.$$

Car

$$Si \quad \alpha > 1 \quad alors \quad \int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt \quad diverge + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt \quad converge = diverge.$$

$$Si \quad \alpha < 1 \quad alors \quad \int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt \quad converge + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt \quad diverge = diverge.$$

$$Si \quad \alpha = 1 \quad alors \quad \int_0^1 \frac{1}{t} dt = +\infty \quad + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt = +\infty = diverge.$$

1.11 Exercice

Soit f continue et positive sur $[0, +\infty[$ quelconque telle que $t^2 f(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$. Alors

1. $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge
2. $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ diverge
3. On ne peut rien dire sur la nature de $\int_0^{+\infty} f(t)dt$

Solution

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ **converge**

$t^2 f(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$ équivalente à :

$$f(t) =_{+\infty} o(\frac{1}{t^2})$$

Comme $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2}dt$ converge $\alpha = 2 > 1$. Alors $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge

1.12 Exercice

Soit f continue et positive sur $[0, +\infty[$ quelconque telle que $t^2 f(t) \to +\infty$ quand $t \to +\infty$. Alors

1. $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge
2. $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ diverge
3. On ne peut rien dire sur la nature de $\int_0^{+\infty} f(t)dt$

Solution

3. **On ne peut rien dire sur la nature de** $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$

$t^2 f(t) \to +\infty$ quand $t \to +\infty$ équivalente à :

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall t/t > B \Longrightarrow f(t) > \frac{A}{t^2}$$

D'après le critère de comparaison On ne peut rien conclure.

1.13 Exercice

Soit f continue et positive sur $[0, +\infty[$ quelconque telle que $tf(t) \to +\infty$ quand $t \to +\infty$. Alors

1. $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge
2. $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ diverge
3. On ne peut rien dire sur la nature de $\int_0^{+\infty} f(t)dt$

Solution

$$2. \quad \int_0^{+\infty} f(t)dt \quad \textbf{diverge}$$

$tf(t) \to +\infty$ quand $t \to +\infty$.
équivalente à :

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall t / t > B \Longrightarrow f(t) > \frac{A}{t}$$

Comme $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t} dt$ diverge $\alpha = 1$. Alors $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ diverge

1.14 Exercice

Soit f continue et positive sur $[0, +\infty[$ quelconque telle que $tf(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$. Alors

1. $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge
2. $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ diverge
3. On ne peut rien dire sur la nature de $\int_0^{+\infty} f(t)dt$

Solution

3. **On ne peut rien dire sur la nature de** $\int_0^{+\infty} f(t)dt$

$tf(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$
équivalente à :

$$\forall \epsilon > 0, \exists B > 0, \forall t / t > B \Longrightarrow f(t) < \frac{\epsilon}{t}$$

D'après le critère de comparaison On ne peut rien conclure.

1.15 Exercice

Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Alors $\int_0^1 \frac{\sin^2(t)}{t^\alpha} dt$ converge si

1. $\alpha < 1$
2. $\alpha > 1$
3. $\alpha = 1$
4. $\alpha < 2$
5. rien de ce qui précède

Solution

1. rien de ce qui précède

$I = \int_0^1 \frac{\sin^2(t)}{t^\alpha} dt$ est une intégrale impropre car $\frac{\sin^2(t)}{t^\alpha}$ est continue sur $]0, 1]$ pour $\alpha > 0$.

Convergence : on utilise l'équivalence au voisinage de $x = 0$

$\frac{\sin^2(t)}{t^\alpha} \sim_0 \frac{t^2}{t^\alpha}$ avec

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^{\alpha-2}}$$

converge si seulement si $\alpha - 2 < 1$ critère de Riemann. Alors $\alpha < 3$

1.16 Exercice

Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Alors $\int_0^{+\infty} e^{\alpha t} dt$ converge si

1. $\alpha < 0$
2. $\alpha > 0$
3. $\alpha = 0$
4. $\alpha < 1$
5. rien de ce qui précède

Solution

1. $\alpha < 0$

Si $\alpha = 0$, $\int_0^{+\infty} e^{\alpha t} dt = +\infty$

Si $\alpha \neq 0$ alors

$$\int_0^{+\infty} e^{\alpha t} dt = \lim_{t \longrightarrow +\infty} \int_0^t e^{\alpha x} dx = \lim_{t \longrightarrow +\infty} [\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}]_0^t = \lim_{t \longrightarrow +\infty} (\frac{e^{\alpha x} - 1}{\alpha})$$

Pour $\alpha < 0$, $\int_0^{+\infty} e^{\alpha t} dt = \frac{-1}{\alpha}$ converge.
Pour $\alpha > 0$, $\int_0^{+\infty} e^{\alpha t} dt = +\infty$ diverge.

1.17 Exercice

Soit $\beta \in \mathbf{R}$. Alors $\int_1^{+\infty} t^\beta e^{-t} dt$ converge si

1. $\forall \beta \in \mathbf{R}^*$
2. $\beta > 1$
3. $\forall \beta \in \mathbf{R}$
4. $\beta < 1$
5. rien de ce qui précède

Solution

3. $\forall \beta \in \mathbf{R}$

Car :

On peut écrire $t^\beta e^{-t} = t^\beta e^{-t/2} e^{-t/2}$. On sait que $\lim_{t \to +\infty} t^\beta e^{-t/2} = 0$, pour tout β, il existe un réel $A > 0$ tel que :

$$\forall t > A \qquad t^\beta e^{-t/2} \leq 1 \, .$$

En multipliant les deux membres de l'inégalité par $e^{-t/2}$ on obtient :

$$\forall t > A \qquad t^{\beta}e^{-t} \leq e^{-t/2}\ .$$

Or l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t/2}dt$ converge car $\alpha = \frac{-1}{2} < 0$

Comme $\int_1^{+\infty} e^{-t/2}dt$ converge, on en déduit que $\int_1^{+\infty} t^{\beta}e^{-t}dt$ converge d'après le théorème de comparaison.

1.18 Exercice

Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Alors $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln(t))^{\alpha}}$ converge si

1. $\alpha < 2$
2. $\alpha > 2$
3. $\alpha = 2$
4. $\alpha > 1$
5. rien de ce qui précède

Solution

$$4. \quad \alpha > 1$$

En effectuant le changement de variable $x = \ln(t)$, alors

$$I = \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln(t))^{\alpha}} = \int_{ln(2)}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$$

D'après l'intégrale de Riemann I est convergente au voisinage de $+\infty$ ssi $\alpha > 1$

1.19 Exercice

Pour quelles valeurs $\alpha \in R$ les intégrales suivantes sont-elles convergentes ?

$$I = \int_a^b \frac{dt}{(t-a)^{\alpha}}; \qquad J = \int_a^b \frac{dt}{(b-t)^{\alpha}};$$

Solution

$$I = \int_a^b \frac{dt}{(t-a)^{\alpha}} \quad \textbf{converge} \quad \textit{pour} \quad \alpha < 1$$

En effectuant le changement de variable $x = t - a$, alors

$$I = \int_a^b \frac{dt}{(t-a)^{\alpha}} = \int_0^{b-a} \frac{dx}{x^{\alpha}}$$

D'après l'intégrale de Riemann I est convergente au voisinage de 0 ssi $\alpha < 1$
De même

$$J = \int_a^b \frac{dt}{(b-t)^{\alpha}} \quad \textbf{converge} \quad \textit{pour} \quad \alpha < 1$$

En effectuant le changement de variable $x = b - t$, alors

$$J = \int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha} = \int_{b-a}^0 \frac{-dx}{x^\alpha} = \int_0^{b-a} \frac{dx}{x^\alpha}$$

D'après l'intégrale de Riemann J est convergente au voisinage de 0 ssi $\alpha < 1$

1.20 Exercice

Étudier la nature de l'intégrale impropre

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt; \qquad \alpha \in \mathbf{R}$$

Solution

$f(t) = \frac{\sin t}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$. On a

$$I = \int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt + \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

a) Convergence en 0

$\int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente puisque $f(t)$ est prolongeable par continuité.

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 0$$

b) Convergence en $+\infty$

En intégrant par parties, On obtient :

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt = [\frac{-\cos t}{t}]_1^x - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt$$

lorsque x tend vers $+\infty$, $\frac{-\cos(x)}{x}$ tend vers 0 puisque c'est le produit d'une fonction bornée et d'une fonction qui tend vers 0. D'autre part

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} dt$$

existe puisque, de $|\frac{\cos(t)}{t^2}| \leq \frac{1}{t^2}$ on tire la convergence absolue, donc la convergence $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$

Finalement I converge.

1.21 Exercice

1. Comment on peux prouver qu'une intégrale converge (ou diverge) ?
2. Donner les théorèmes de comparaison pour la convergence d'intégrale de fonctions continues et positives sur un intervalle $[a; b[$
3. Donner un résultat de comparaison pour des fonctions continues et négatives sur $[a; b[$ (justifier).

Solution

1. Comment on peux prouver qu'une intégrale converge (ou diverge) ?

a- On définit une fonction f et voir sur quel intervalle elle est continue.

b- On regarde si elle est positive ou négative sur l'intervalle.

c- On cherche une comparaison simple (inégalité, équivalent).

d- On ramène à un exemple de référence.

e- on revient à la définition (utile aussi et surtout pour le calcul de l'intégrale).

2. Donner les théorèmes de comparaison pour la convergence d'intégrale de fonctions continues et positives sur un intervalle $[a; b[$

1.21.1 Théorème

Soient f et g deux fonctions positives et continues sur $[a, b[$. Supposons que f soit majorée par g au voisinage de b :

$$\exists A \geq a \quad \forall t > A \qquad f(t) \leq g(t) \ .$$

1. Si $\int_a^b g(t)dt$ converge alors $\int_a^b f(t)dt$ converge.
2. Si $\int_a^b f(t)dt$ diverge alors $\int_a^b g(t)dt$ diverge.

1.21.2 Théorème

Soient f et g deux fonctions continues et strictement positives sur $[a, b[$. Supposons qu'elles soient équivalentes au voisinage de b, c'est-à-dire :

$$\lim_{t \to b} \frac{f(t)}{g(t)} = 1 \ .$$

Alors l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si $\int_a^b g(t)dt$ converge.

Attention : il est important que f et g soient positives !

3. Donner un résultat de comparaison pour des fonctions continues et négatives sur $[a; b[$ **(justifier).**

Si les fonctions sont négatives, on considère $-f$ et $-g$ qui sont positives. On en déduit l'énoncé :

$$\exists A \geq a \quad \forall t > A \qquad f(t) \leq g(t) \leq 0; .$$

1. Si $\int_a^b f(t)dt$ converge alors $\int_a^b g(t)dt$ converge.
2. Si $\int_a^b g(t)dt$ diverge alors $\int_a^b f(t)dt$ diverge.

1.22 Exercice

Calculer les intégrales impropres

$$1)\int_0^1 \ln x dx; \quad 2)\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \quad 3)\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx;$$

$$4)\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}; \quad 5)\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}dx; \quad 6)\int_0^1 \frac{dx}{e^x-1};$$

Solution

1) $\int_0^1 \ln x dx$

On intègre (une intégrale indéfinie) par parties en suite en passe par limite quand x tend vers 0

$$\int \ln t dt = t\ln(t) - \int dt = t\ln(t) - t + c$$

donc

$$\int_0^1 \ln t dt = \lim_{x\longrightarrow 0} \big[t\ln(t) - t + \big]_x^1 = \lim_{x\longrightarrow 0} \big(-1 - x\ln(x) - x\big) = -1$$

donc $\int_0^1 \ln x dx$ converge.

2) $int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\longrightarrow 1}\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \lim_{x\longrightarrow 1}\big[\arcsin(t)\big]_0^x$$

donc

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\longrightarrow 1}\big(\arcsin(x) - 0\big) = \frac{\pi}{2}$$

3) $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$

En effectuant un changement de variable $x-1=y$

$$\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx = \int_0^1 \frac{1+y}{\sqrt{y}}dy = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y}}dy + \int_0^1 \sqrt{y}dy = \big[2\sqrt{y} + \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\big]_0^1 = \frac{8}{3}$$

4) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$

En effectuant un changement de variable $\ln(x)=y$ donc

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}} = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \lim_{y\longrightarrow 1}\big(\arcsin(y) - 0\big) = \frac{\pi}{2}$$

5) $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}dx$

En effectuant un changement de variable $\sqrt{(x)} = y$ donc

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx = \int_0^{+\infty} 2ye^{-y} dy$$

Par une intégration par parties, On obtient

$$\int_0^{+\infty} 2ye^{-y} dy = 2 \lim_{y \longrightarrow +\infty} \Big[-te^{-t} - e^{-t} \Big]_0^y = 2 \lim_{y \longrightarrow +\infty} \Big(-ye^{-y} - e^{-y} + 1 \Big) = 2$$

d'où $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$ converge

6) $\int_0^1 \frac{dx}{e^x - 1}$

En effectuant un changement de variable $e^x - 1 = y$ donc

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x - 1} = \int_0^{e-1} \frac{dy}{y(y+1)}$$

Par intégration on décompose en élément simple

$$\int_0^{e-1} \frac{dy}{y(y+1)} = \int_0^{e-1} \frac{dy}{y} + \int_0^{e-1} \frac{dy}{y+1} = \lim_{y \longrightarrow 0} \Big[\ln | \frac{t}{t+1} | \Big]_y^{e-1} = +\infty$$

1.23 Exercice

Calculer les intégrales suivantes,après en avoir étudié la convergence :

$$1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}, 2) \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos x dx \quad , 3) \int_1^{+\infty} \arctan \frac{1}{x} dx$$

Solution

$$1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$$

$f(t) = \frac{1}{x^2+2x+2}$ continue sur $] - \infty, +\infty[$

On divise l'intégrale

$$1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = \int_{-\infty}^{1} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$$

Convergence en $+\infty$

$f(t) = \frac{1}{t^2+2t+2} \sim_{+\infty} \frac{1}{t^2}$, or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}$ converge donc $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2+2t+2}$ de même pour $-\infty$. On a

$f(t) = \frac{1}{t^2+2t+2} \sim_{-\infty} \frac{1}{t^2}$, or $\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{t^2}$ converge donc $\int_{-\infty}^{1} \frac{dt}{t^2+2t+2}$

On calcule l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$$

En effectuant un changement de variable $y = x + 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{y^2+1} = \Big[\arctan(y)\Big]_{-\infty}^{+\infty} = \pi$$

$$2) \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos x dx \quad ,$$

$e^{-x}\cos x$ continue sur $[0,+\infty[$, on a $|e^{-x}\cos x| \leq e^{-x}$, or $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ converge absolument donc $\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x dx$ converge

On calcule l'intégrale par parties

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x = \frac{1}{2}\Big[\sin(x)-\cos(x)\Big]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$$

$$3) \int_1^{+\infty} \arctan\frac{1}{x} dx$$

$\arctan\frac{1}{x}$ est continue sur $[0,+\infty[$

on a $\arctan\frac{1}{x} \sim_{+\infty} \frac{1}{x}$ or l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}$ diverge (intégrale de Riemann) $\alpha = 1$ d'où $\int_1^{+\infty}\arctan\frac{1}{x}dx$ diverge

1.24 Exercice

Déterminer la nature de :

$$1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+e^t)(1+e^{-t})}, \quad 2) \int_1^{+\infty} (e-(1+\frac{1}{t})^t)dt, \quad 3) \int_1^{+\infty} (\sqrt[3]{t^3+1}-\sqrt{t^2+1})dt$$

Solution

$$1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+e^t)(1+e^{-t})} \quad \textbf{converge}$$

Au voisinage de $+\infty$

$$\frac{1}{(1+e^t)(1+e^{-t})} \sim_{+\infty} e^{-t}$$

or $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t}dt$ converge d'où $\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+e^t)(1+e^{-t})}$ converge

Au voisinage de $-\infty$

$$\frac{1}{(1+e^t)(1+e^{-t})} \sim_{-\infty} e^{t}$$

or $\int_{-\infty}^{0} e^{t}dt$ converge d'où $\int_{-\infty}^{0}\frac{dt}{(1+e^t)(1+e^{-t})}$ converge

$$2) \int_1^{+\infty} (e-(1+\frac{1}{t})^t)dt \quad \textbf{diverge}$$

$$(1+\frac{1}{t})^t = e^{t\ln(1+\frac{1}{t})} = e^{t\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{2t^2}+o(\frac{1}{t^2})\right)} = e^{1-\frac{1}{2t}+o(\frac{1}{t})}$$

Ainsi

$$e-(1+\frac{1}{t})^t = e\left(1-e^{-\frac{1}{2t}+o(\frac{1}{t})}\right) = e\left(1-(1-\frac{1}{2t}+o(\frac{1}{t}))\right)$$

$$= \frac{e}{2t}+o(\frac{1}{t}) \sim_{+\infty} \frac{e}{2t}$$

$$3) \int_1^{+\infty} (\sqrt[3]{t^3+1}-\sqrt{t^2+1})dt \quad \textbf{diverge}$$

$$\sqrt[3]{t^3+1}-\sqrt{t^2+1}) = t\left(\left(1+\frac{1}{t^3}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(1-\frac{1}{t^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= t\left(1+\frac{1}{3t^3}-1-\frac{1}{2t^2}+o(\frac{1}{t^3})\right) = -\frac{1}{2t}+\frac{1}{3t^2}+o(\frac{1}{t^2}) \sim_{+\infty} -\frac{1}{2t}$$

1.25 Exercice

Soit $a \in R_+^*$,déterminer la nature de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^a}dt$$

Solution

la fonction $f(t) = \frac{\sin^2(t)}{t^a}$ est continue sur $]0,+\infty[$.
Convergence en 0

$$f(t) = \frac{\sin^2(t)}{t^a} \sim_0 \frac{t^2}{t^a} = \frac{1}{t^{a-2}}$$

donc $\int_0^1 \frac{\sin^2(t)}{t^a}dt$ converge ssi $a-2<1$
c'est-à-dire $a<3$
Convergence en $+\infty$

1) Supposons que $a>1$
pour tout $t \in]0,+\infty[$,on a

$$|\frac{\sin^2(t)}{t^a}| \leq \frac{1}{t^a}$$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^a}dt$ converge car $a>1$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^a}dt$ converge.
2) Supposons que $0<a<1$
Via la relation $\sin^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2}$,on a

$$\int_1^x \frac{\sin^2(t)}{t^a}dt = \frac{1}{2}(\int_1^x \frac{dt}{t^a} - \int_1^x \frac{\cos(2t)}{t^a}dt)$$

Or

$$\int_1^x \frac{dt}{t^a} = \frac{1}{1-a}(t^{1-a} - 1)$$

et via une intégration par parties :

$$\int_1^x \frac{\cos(2t)}{t^a}dt = \frac{1}{2}\big(\frac{\sin(2t)}{t^a} - \sin(2)\big) + \frac{a}{2}\int_1^x \frac{\sin(2t)}{t^{a+1}}dt$$

Ainsi

$$\int_1^x \frac{\sin^2(t)}{t^a}dt = \frac{1}{2}\big(\frac{1}{1-a}(t^{1-a} - 1) + -\frac{1}{2}\big(\frac{\sin(2t)}{t^a} - \sin(2)\big) - \frac{a}{2}\int_1^x \frac{\sin(2t)}{t^{a+1}}dt\big)$$

Or $\forall t \in]0, +\infty[$,on a

$$|\frac{\sin(2t)}{t^{a+1}}| \leq \frac{1}{t^{a+1}}$$

et $a+1 > 1$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t^{a+1}}dt$ converge absolument donc converge . D'autre part, $\frac{\sin(2t)}{t^a} \longrightarrow 0$, quand $t \longrightarrow +\infty$ et $\frac{1}{1-a}(t^{1-a} - 1) \longrightarrow +\infty$, quand $t \longrightarrow +\infty$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^a}dt$ diverge

3 Supposons que $a = 1$

de même pour $a = 1$

$$\int_1^x \frac{\sin^2(t)}{t}dt = \frac{1}{2}\big(\ln(t) + -\frac{1}{2}\big(\frac{\sin(2t)}{t} - \sin(2)\big) - \frac{a}{2}\int_1^x \frac{\sin(2t)}{t^2}dt\big)$$

or $\ln(t) \longrightarrow +\infty$ quand $t \longrightarrow +\infty$, $\frac{\sin(2t)}{t} \longrightarrow 0$ quand $t \longrightarrow +\infty$,et $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}dt$ converge absolument donc converge

D'où $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t}dt$ diverge.

Finalement si $0 < a \leq 1$, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^a}dt$ diverge.

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}dt$ converge ssi $1 < a \leq 3$

1.26 Concours 2015/2016

Considérons

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^a)}, \quad a \in R_+$$

1. Montrer que l'intégrale I est impropre et qu'elle est convergente.
2. Via un changement de variable,Calculer I

Solution

1)$f(t) = \frac{1}{(1+t^2)(1+t^a)}$ est continue sur $[0, +\infty[$

Convergence en $+\infty$

$$f(t) = \frac{1}{(1+t^2)(1+t^a)} \sim_{+\infty} \frac{1}{t^{a+2}}$$

Or $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^{a+2}}dt$ converge $a+2 > 1$ donc I converge.

En Effectuant le changement de variable $x = \frac{1}{t}$ on a,

$$I = \int_{+\infty}^{0} \frac{1}{(1+\frac{1}{x^2})(1+\frac{1}{x^a})} \cdot \frac{-dx}{x^2} = \int_{0}^{+\infty} \frac{x^{a+2}}{(1+x^2)(1+x^a)} \cdot \frac{dx}{x^2}$$

$$= \int_{0}^{+\infty} \frac{x^a}{(1+x^2)(1+x^a)} dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{1+x^a-1}{(1+x^2)(1+x^a)} dx$$

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)} - I = \left[\arctan(x)\right]_0^{+\infty} - I = \frac{\pi}{2} - I$$

d'où $I = \frac{\pi}{4}$

1.27 Exercice

1. Montrer que $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{\ln t}$ diverge.
2. Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t\sin(t)}$ diverge.

Solution

1)Pour tout $t \in [e, +\infty[$, $\ln(t) \leq t$ donc

$$\frac{1}{\ln(t)} \geq \frac{1}{t}$$

D'après le critère de comparaison $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge donc $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{\ln t}$ diverge.
2)Pour tout $t \in [1, +\infty[$, $\sin(t) \leq t$ donc $1 + t\sin(t) \leq 1 + t$

$$\frac{1}{1+t\sin(t))} \geq \frac{1}{1+t}$$

D'après le critère de comparaison $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t}$ diverge donc $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t\sin t}$ diverge.

1.28 Concours 2014/2015

1. Montrer que $\int_0^1 t\ln t dt$ converge ?
2. Soit I$(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^\alpha} dt$

a) Déterminer la nature de $I(\alpha)$ en fonction de α ?
b) Effectuer le changement de variable $y = \frac{1}{x}$ dans $I(2)$.En déduire la valeur de $I(2)$.

Solution

$\int_0^1 t\ln t dt$ est une intégrale impropre car $t\ln t$
est continue sur $]0,1]$. Par intégration par parties, on a

$$\int_0^1 t\ln t dt = [\frac{t^2}{2}\ln(t)]_0^1 - \int_0^1 \frac{tdt}{2} = -\frac{1}{4}$$

donc $\int_0^1 t\ln t dt$ converge.

on divise $I(\alpha)$

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{t\ln t}{(1+t^2)^\alpha}dt=\int_0^1\frac{t\ln t}{(1+t^2)^\alpha}dt+\int_1^{+\infty}\frac{t\ln t}{(1+t^2)^\alpha}dt$$

Convergence en 0

$$\frac{t\ln t}{(1+t^2)^\alpha}\sim_0 t\ln(t)$$

or $\int_0^1 t\ln t dt$ converge d'où $\int_0^1\frac{t\ln t}{(1+t^2)^\alpha}dt$

Convergence en $+\infty$

$$\frac{t\ln t}{(1+t^2)^\alpha}\sim_{+\infty}\frac{t\ln(t)}{t^{2\alpha}}=\frac{\ln(t)}{t^{2\alpha}-1}$$

or $\frac{\ln(t)}{t^{2\alpha-1}}dt$ converge ssi $2\alpha-1>1$ donc $\alpha>1$ alors $\int_1^{+\infty}\frac{t\ln t}{(1+t^2)^\alpha}dt$ converge ssi $\alpha>1$ d'où $I(\alpha)$ converge ssi $\alpha>1$

En Effectuant le changement de variable $x=\frac{1}{t}$ dans $I(2)$, on a

$$I(2)=\int_{+\infty}^0\frac{\frac{1}{x}\ln(\frac{1}{x})}{(1+\frac{1}{x^2})^2}\Big(-\frac{dx}{x^2}\Big)=-\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^\alpha}dx$$

c'est-à-dire $I(2)=-I(2)$ donc $I(2)=0$

1.29 Concours 2013/2014

On considère les intégrales suivantes :

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(sint)dt,\qquad\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(cost)dt$$

1. Montrer que l'intégrale I est impropre et qu'elle est convergente.
2. Calculer $\sin(\frac{\pi}{2}-t)$ et puis montrer que $I=J$
3. Montrer que $I+J=-\frac{\pi(ln2)}{2}+I$

Solution

1. L'intégrale I converge.

$\ln(\sin(t))$ est continue sur $]0,\frac{\pi}{2}]$, Comme $\sin(t)\sim_0 t$,et $\ln t\le\frac{1}{\sqrt{t}}$ donc l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{t}}dt$ converge, car intégrale de Riemann $\alpha=\frac{1}{2}<1$ alors l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(t)dt$ converge, ce qui implique que I converge.

On montre que $I=J$**.**

D'après les relations trigonométrique on a

$$\sin(\frac{\pi}{2}-t)=\cos(t)$$

Effectuons le changement de variable $t=\frac{\pi}{2}-u$. On a $dt=-du$ comme $t\in[x,\frac{\pi}{2}]$ donc $u\in[\frac{\pi}{2}-x,0]$. Ainsi

$$\int_x^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin t)dt=\int_{\frac{\pi}{2}-x}^0\ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\right)\big(-du\big)=\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}\ln(\cos u)du$$

Ainsi, lorsque $x \to 0$, cela prouve $I = J$ (et en particulier J converge).

Calcul de $I + J$.

$$I+J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\ln(\sin t)+\ln(\cos t)\big)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t \cdot \cos t)dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(t\frac{1}{2}\sin(2t)\big)dt = -\frac{\pi}{2}\ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(\sin(2t)\big)dt$$

Et comme $I = J$, on a

$$2I = -\frac{\pi}{2}\ln 2 + K.$$

Il nous reste à évaluer $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(\sin(2t)\big)dt$:

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(\sin(2t)\big)dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin u)du$$

(changement de variable $u = 2t$)

$$= \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin u)du = \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \ln\big(\sin(\pi - v)\big)\,(-dv)$$

(changement de variable $v = \pi - u$)

$$= \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin v)dv = \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}I = I$$

Conclusion.

Ainsi comme $2I = -\frac{\pi}{2}\ln 2 + K$ et $K = I$ on trouve :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)dt = -\frac{\pi}{2}\ln 2$$

et $J = I$.

1.30 Exercice

Étudier la nature des intégrales impropres suivantes

1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}dx$; 2) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$; 3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{x-1}}$; 4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x+3-\ln x}{x^2+1}dx$;

Solution

1) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}dx$

$\frac{\ln x}{x^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$

convergence en $+\infty$

$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}dx$ converge car intégrale de Bertrand $\alpha = 2 > 1$.

2) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$

$\frac{1}{x(\ln x)^2}$ est continue sur $]0, \frac{1}{2}]$
En effectuant un changement de variable $\ln(x) = -t$ on obtient :
$\int_{\ln(2)}^{+\infty} \frac{dt}{x^2}$ converge car $\alpha = 2 > 1$ (intégrale de Riemann). donc $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$ converge.

3) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{x-1}}$

$\frac{1}{x^2\sqrt{x-1}}$ est continue sur $]1, +\infty[$
convergence en $+1$

$$\frac{1}{x^2\sqrt{x-1}} \sim_1 \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

Or $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ converge d'après l'intégrale de Riemann d'où $\int_1^2 \frac{1}{x^2\sqrt{x-1}}$ converge
convergence en $+\infty$

$$\frac{1}{x^2\sqrt{x-1}} \sim_{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}$$

Or $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{5}{2}}}$ converge d'après l'intégrale de Riemann d'où $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2\sqrt{x-1}}$ converge
conclusion
$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{x-1}}$ converge.

4) $\int_0^{+\infty} \frac{x+3-\ln x}{x^2+1} dx$

$\frac{x+3-\ln x}{x^2+1}$ est continue sur $]0, +\infty[$
convergence en 0

$$\frac{x+3-\ln x}{x^2+1} \sim_0 -\ln(x)$$

Or $\int_0^1 -\ln(x)dx$ converge donc $\int_0^1 \frac{x+3-\ln x}{x^2+1} dx$ converge
convergence en $+\infty$

$$\frac{x+3-\ln x}{x^2+1} \sim_0 \frac{1}{x}$$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ diverge donc $\int_1^{+\infty} \frac{x+3-\ln x}{x^2+1} dx$ diverge

1.31 Exercice

L'intégrale suivante est elle convergente

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\ln t(t^2+1)} dt$$

Solution

On divise l'intégrale en trois points $0, 1, +\infty$
convergence en 0
$f(t) = \frac{1}{\ln t(t^2+1)}$ est prolongeable par continuité en 0 donc $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\ln t(t^2+1)} dt$ converge.

convergence en $+\infty$

$$f(t) = \frac{1}{\ln t(t^2+1)} \sim_{+\infty} \frac{1}{t^2 \ln t}$$

Or $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^2 \ln t}$ converge intégrale de Bertrand $\alpha = 2 > 1$ d'où $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln t(t^2+1)} dt$ converge.

convergence en 1

$$f(t) = \frac{1}{\ln t(t^2+1)} \sim_1 \frac{1}{t-1}$$

Or $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{t-1} dt$ diverge intégrale de Riemann $\alpha = 1$ d'où $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{t-1} dt$ diverge

Conclusion

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\ln t(t^2+1)} dt \quad \textbf{diverge}$$

1.32 Exercice : Intégrales de Bertrand

Soit $(\alpha, \beta) \in R^2$. Montrer que :

1. $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln(t))^\beta} \Longleftrightarrow \alpha > 1 \quad ou \quad (\alpha = 1 \quad et \quad \beta > 1)$
2. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^\alpha |\ln(t)|^\beta} \Longleftrightarrow \alpha < 1 \quad ou \quad (\alpha = 1 \quad et \quad \beta > 1)$
3. $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dt}{t^\alpha |\ln(t)|^\beta} \Longleftrightarrow \beta < 1$

Solution

1. $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln(t))^\beta} \Longleftrightarrow \alpha > 1 \quad ou \quad (\alpha = 1 \quad et \quad \beta > 1)$

Supposons $\alpha > 1$ et soit $\gamma \in]1, \alpha[$. Alors pour tout $\beta \in \mathbf{R}$

$$t^\gamma \frac{1}{t^\alpha (\ln(t))^\beta} = \frac{1}{t^{\alpha-\gamma} (\ln(t))^\beta} \longrightarrow 0, \quad t \longrightarrow +\infty$$

donc

$$\frac{1}{t^\alpha (\ln(t))^\beta} = o(\frac{1}{t^\gamma})$$

Or $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\gamma}$ converge car $\gamma > 1$ donc $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln(t))^\beta}$ converge.
Supposons $\alpha < 1$. Alors pour tout $\beta \in \mathbf{R}$

$$t \frac{1}{t^\alpha (\ln(t))^\beta} = \frac{t^{1-\alpha}}{(\ln(t))^\beta} \longrightarrow +\infty, \quad t \longrightarrow +\infty$$

Donc,pour tout $\beta \in \mathbf{R}$, il existe $T \in [2, +\infty[$ tel que pout tout $t \in [T, +\infty[$

$$\frac{1}{t^\alpha (\ln(t))^\beta} \geq \frac{1}{t}$$

or $\int_T^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge donc $\int_T^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln(t))^\beta}$ diverge d'où $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln(t))^\beta}$ diverge
Pour $\alpha = 1$ on pose $\ln(t) = x$

Alors
$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\,(\ln t)^\beta} dt = \int_{\ln(2)}^{+\infty} \frac{dx}{(\ln x)^\beta}$$
d'après l'intégrale de Riemann On en déduit :
$$Si \quad \beta > 1 \quad alors \quad \int_2^{+\infty} \frac{1}{t\,(\ln t)^\beta} dt \quad converge.$$
$$Si \quad \beta \leq 1 \quad alors \quad \int_2^{+\infty} \frac{1}{t\,(\ln t)^\beta} dt \quad diverge.$$
2 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^\alpha |\ln(t)|^\beta} \Longleftrightarrow \alpha < 1 \quad ou \quad (\alpha = 1 \quad et \quad \beta > 1)$

En effectuant un changement de variable $t = \frac{1}{y}$

Alors $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^\alpha |\ln(t)|^\beta}$ est de même nature que :
$$\int_{+\infty}^{2} \frac{y^\alpha}{|-\ln(y)|^\beta} \cdot \left(\frac{-dy}{y^2} \right) = \int_2^{+\infty} \frac{dy}{y^{2-\alpha} (\ln y)^\beta}$$
Or
$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{y^{2-\alpha}(\ln y)^\beta} dt \quad converge \Longleftrightarrow 2 - \alpha > 1 \quad ou \quad (2 - \alpha = 1 \quad et \quad \beta > 1)$$
c'est-à-dire
$$\alpha < 1 \quad ou \quad (\alpha = 1 \quad et \quad \beta > 1)$$
3 $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dt}{t^\alpha |\ln(t)|^\beta} \Longleftrightarrow \beta < 1$

on a
$$\frac{1}{t^\alpha |\ln(t)|^\beta} \sim_1 \frac{1}{|t-1|^\beta}$$
Or via le changement de variable $t = y + 1$

$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dt}{t^\alpha |\ln(t)|^\beta}$ est de même nature que :
$$\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{dy}{|y|^\beta} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{y^\beta} \quad converge \quad ssi \quad \beta < 1$$
donc $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dt}{t^\alpha |\ln(t)|^\beta}$ converge ssi $\beta < 1$

1.33 Concours 2016/2017

1) Étudier la convergence des intégrales suivantes :
$$J = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^3} dt, \quad I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^3} dt$$
2) Montrer que $I = J$ en utilisant le changement de variable ($y = \frac{1}{t}$)

3) Verifier que pour tout $x \in \mathbf{R}$
$$1 + t^3 = (1+t)(t^2 - t + 1)$$
4)Calculer $I + J$,puis en déduire la valeur de I.

Solution

$f(t) = \frac{t}{1+t^3}$ et $\frac{1}{1+t^3}$ sont continues sur $[0, +\infty[$ donc J et I sont bien des intégrales impropres.

convergence en $+\infty$

On a :

$$\frac{t}{1+t^3} \sim_{+\infty} \frac{1}{t^2}$$

or $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge car (intégrale de Riemann) $\alpha = 2 > 1$ donc J converge

de même

$$\frac{1}{1+t^3} \sim_{+\infty} \frac{1}{t^3}$$

or $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt$ converge car (intégrale de Riemann) $\alpha = 3 > 1$ donc I converge

On montre que $I = J$

d'après le changement de variable $y = \frac{1}{t}$ on obtient :

$dt = -\frac{dy}{y^2}$ alors,

$$I = \int_{+\infty}^{0} \frac{-dy}{y^2} . \frac{1}{1+\frac{1}{y^3}} = \int_0^{+\infty} \frac{dy}{y^2\left(\frac{y^3+1}{y^3}\right)}$$

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{y}{1+y^3} dy = J$$

On calcule $I + J$

$$I + J = \int_0^{+\infty} \frac{1+t}{1+t^3} dt = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2-t+1} dt$$

On a

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} dt = \frac{4}{3} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(t-\frac{1}{2})\right)^2+1} dt$$

on pose $\frac{2}{\sqrt{3}}(t-\frac{1}{2}) = y$ on obtient

$$I + J = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Big[\arctan(y)\Big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

comme $I = J$ d'où $I = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$

1.34 Exercice

Étudier la nature de l'intégrale :

$$\int_2^{+\infty} \sqrt{t^2+3t}\,\ln\left(\cos\frac{1}{t}\right)\,\sin^2\left(\frac{1}{\ln t}\right)dt$$

Solution

Convergence en $+\infty$. On a :

$$\sqrt{t^2+3t} = t\sqrt{1+\frac{3}{t}} \quad \underset{+\infty}{\sim} \quad t$$

$$\ln\left(\cos\frac{1}{t}\right) = \ln\left(1-\frac{1}{2t^2}+o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right) \quad \underset{+\infty}{\sim} \quad -\frac{1}{2t^2}$$

$$\sin^2\left(\frac{1}{\ln t}\right) \quad \underset{+\infty}{\sim} \quad \left(\frac{1}{\ln t}\right)^2$$

D'où un équivalent de la fonction au voisinage de $+\infty$:

$$\sqrt{t^2+3t}\,\ln\left(\cos\frac{1}{t}\right)\,\sin^2\left(\frac{1}{\ln t}\right) \quad \underset{+\infty}{\sim} \quad -\frac{1}{2t\,(\ln t)^2}$$

Mais comme l'intégrale de Bertrand $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\,(\ln t)^2}dt$ converge, alors notre intégrale est convergente.

Chapitre 2

Proposition des Exercices

2.1 Exercice

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\ln(\tan(t))dt, \quad 2) \int_0^{+\infty} \sqrt{t}\sin(t^2)dt, \quad 3) \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{\frac{3}{2}}}dt \quad ,$$

2.2 Exercice

Étudier la nature de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{t+1} - \sqrt[3]{t}}{\sqrt{t}}dt$$

2.3 Exercice

Soit $a > 0$; étudier l'existence, et déterminer éventuellement la valeur, de :

$$\lim_{a \longrightarrow 0} \int_{-a}^{a} \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(a^2-t^2)}}$$

2.4 Exercice

1) Montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$$

2) En déduire que

$$\forall a \in \mathbf{R}_+^*, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2}dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

2.5 Exercice

Montrer que pour tout réel $x > 0$ l'intégrale $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt\,;$ est convergente.

2.6 Exercice

Montrer que pour tout réel $x > 0, y > 0$ l'intégrale $\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt\,;$ est convergente.

2.7 Concours 2011/2012

1) Calculer l'intégrale $\int \ln(t)dt$
2) En remarquant que $1 - t^2 = (1 - t)(1 + t)$ calculer :

$$\int \ln(1 - t^2)dt$$

3) En déduire $\int \frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}}dt$ en effectuant le changement de variable $y = \sqrt{1-t}$
4)Pourquoi $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}}dt$ est elle une intégrale impropre ? Montrer qu'elle est convergente en calculant explicitement sa valeur.

2.8 Exercice

Soit $\alpha, \beta \in R$ Déterminer la nature de

$$1) \int_0^{+\infty} \frac{t^\beta}{1 + t^\alpha}dt, \quad 2) \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + t^\alpha)}{t^\beta}dt$$

2.9 Exercice

Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes, en précisant en quel(s) point(s) elles sont impropres

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1}dt, \qquad J = \int_0^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t^2}dt, \quad K \int_0^{+\infty} \frac{|\sin(t)|^{\frac{3}{2}}}{t^2}dt$$

2.10 Exercice

a) Justifier la convergence de l'intégrale impropre

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(t+1)}$$

puis en déduire la valeur de I

b) Justifier la convergence puis faire le calcul de l'intégrale impropre

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt$$

c) Justifier la convergence puis faire le calcul de l'intégrale impropre

$$K = \int_0^{+\infty} \frac{e^t}{e^{2t}+1} dt$$

Bibliographie

[1] Claude servien *Analyse Tom 3,Suites et séries de fonctions,intégrales.* ellipses.

[2] Daniel Fredon, Myriam Maumy. Bertrand, Frédéric Bertrand *mathématique Analyse en 30 fiches.* Dunod

[3] *Site web http ://exo7.emath.fr/search.php.*

[4] Olivier Rodot *Analyse mathématique une approche historique,cours exercices corrigés.* de boeck.

Table des matières