TD6 | 3H

La technique de changement de variable pour le calcul de primitives.

1) **Calculons** $\int \frac{\cos x}{1+\sin x}.dx$. Dans ce cas le changement de variable général : $tg(x/2)=t$ donne des calculs très longs. Il est plus facile, avec moins de calculs d'utiliser un changement de variable particulier.

Notons que : $\cos x . dx = d(\sin x) = d(1+\sin x)$

posons $\boxed{\sin x + 1 = t}$, d'où l'intégrale

$$\int \frac{dt}{t} = \log|t| + K$$

i.e $$\boxed{\int \frac{\cos x}{1+\sin x}.dx = \text{Log}|1+\sin x| + K}$$

2) **Calculons** $\int (tg x)^5 . dx$. l'idée est la suivante

on a $tg^5 x = tg x . tg^4 x = tg x . (tg^2 x)^2 = tg x . \left[(tg^2 x + 1) - 1\right]^2$

$= tg x . \left[1 + 2(1+tg^2 x) + (1+tg^2 x)^2\right]$

$= tg x + 2 tg x . tg' x + tg x (1+tg^2 x) . tg' x$

En résumé :

$$tg^5 x = tg x + 2\, tg x \cdot tg' x + tg x \cdot tg' x + tg^3 x \cdot tg' x$$

i.e $tg^5 x = tg x + 3\, tg x \cdot tg' x + tg^3 x \cdot tg' x$

alors, par linéarité, on tire

$$\int tg^5 x \cdot dx = \int tg x \cdot dx + 3 \int \underbrace{tg x}_{u} \cdot \underbrace{tg' x}_{u'} \, dx + \int \underbrace{tg^3 x}_{V^3} \cdot \underbrace{tg' x}_{V'} \cdot dx$$

$$\int tg^5 x \cdot dx = -\log|\cos x| + \frac{3}{2} \cdot tg^2 x + \frac{1}{4} \cdot tg^4 x + K$$

Dans ce calcul, on a utilisé :

i) $tg' x = 1 + tg^2 x$

ii) $\int V^m_{(x)} \cdot V' \cdot dx = \frac{V(x)^{m+1}}{m+1}$, $m \neq -1$

3)

Calculons $\int (\sin^8 x).(\cos^3 x).dx$

Notons que : $(\sin^8 x).(\cos^3 x) = \sin^8 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos x$

$= \sin^8 x.(1-\sin^2 x).\cos x$

$= (\sin^8 x - \sin^{10} x).\cos x$

et on a aussi $d(\sin x) = \cos x . dx$

on utilisera alors le changement de variable particulier $\sin x = t$.

d'où $\int (t^8 - t^{10}).dt = \dfrac{t^9}{9} - \dfrac{t^{11}}{11} + K$

$$\boxed{\text{Enfin } \int \sin^8 x \cdot \cos^3 x \cdot dx = \frac{\sin^9 x}{9} - \frac{\sin^{11} x}{11} + K}$$

4) Remarque sur $\int \dfrac{\cos x}{\cos^2 x + \sin x - 4} . dx$

on remarque que :

$$\frac{\cos x}{\cos^2 x + \sin x - 4}.dx = \frac{d(\sin x)}{(1-\sin^2 x)+\sin x - 4} = \frac{-d(\sin x)}{\sin^2 x - \sin x + 3}$$

Il suffit de poser $\sin x = t$, et on est amené à calculer $\int \dfrac{-dt}{t^2 - t + 3}$.

Cette intégrale peut facilement être mise sous la forme $\int \dfrac{dz}{z^2+1} = \text{Arctg}\, z + K$.

5) Calculons $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}} \cdot dx$

posons $e^x = t$. donc $x = \log t$, et $dx = \frac{dt}{t}$

on est amené à calculer :

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{t+1}} \cdot \frac{dt}{t} = \int \frac{t}{\sqrt{t+1}} \cdot dt$$, qui est abélienne de $2^{ème}$ espèce.

une $2^{ème}$ fois, on pose $\sqrt{1+t} = z$

donc $t = z^2 - 1$, et $dt = 2z \cdot dz$

d'où l'intégrale $\int \frac{(z^2-1)}{\cancel{z}} \cdot 2\cancel{z} \cdot dz$

on a $\boxed{\int (2z^2 - 2) \cdot dz = \frac{2}{3} z^3 - 2z + K}$

Enfin $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}} \cdot dx = \frac{2}{3}\left(\sqrt{e^x+1}\right)^3 - 2\sqrt{e^x+1} + K$

6) Calculons $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} \cdot dx = \int \frac{1}{\cancel{a}} \cdot \frac{a^2 \cdot (x/a)^2}{\sqrt{1-(x/a)^2}} \cdot \cancel{a}\, d(x/a)$

$(a>0)$

$$= a^2 \cdot \int \frac{(x/a)^2}{\sqrt{1-(x/a)^2}} \cdot d(x/a)$$

posons $x/a = t$

d'où $a^2 \cdot \int \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} \cdot dt$. posons une $2^{ème}$ fois $t = \cos z$

d'où l'intégrale $\int \frac{\cos^2 z}{\sqrt{\sin^2 z}} \cdot d(\cos z) = -\int \cos^2 z \cdot \frac{\cancel{\sin z}}{\cancel{\sin z}} dz$

on prend $z \in]0,\pi[$. Alors $\sin z > 0$.

Enfin $-\int \cos^2 z \cdot dz = -\int \frac{(1+\cos 2z)}{2} \cdot dz$

$$= -\frac{1}{2}z - \frac{1}{4}\sin(2z) + K$$

$$= -\frac{1}{2}z - \frac{1}{2}\sin z \cdot \cos z + K$$

En résumé :

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} \cdot dx = a^2 \cdot \left[\frac{1}{2}\text{Arccos}(x/a) - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{a}\right)\cdot\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right]$$

$$= a^2 \cdot \text{Arccos}(x/a) - \frac{1}{2}x \cdot \sqrt{a^2-x^2} + K$$

---

7) **Calculons** $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}} \cdot dx$.

posons $x = t^6$. Alors $\sqrt[3]{x} = (t^6)^{\frac{1}{3}} = t^2$, et $\sqrt{x} = (t^6)^{\frac{1}{2}} = t^3$

Enfin $dx = 6t^5 \cdot dt$.

Notre intégrale prend la forme : $\int \frac{t^3}{t^3-t^2} \cdot 6t^5 \cdot dt$

$$= 6 \cdot \int \frac{t^8}{t^2(t-1)} \cdot dt = 6 \cdot \int \frac{t^6}{t-1} \cdot dt$$

La division euclidienne nous donne :

$$t^6 = (1+t+t^2+t^3+t^4+t^5)(t-1)+1$$

Alors $\displaystyle\int \frac{6t^6}{t-1}\cdot dt = 6\cdot\int\left(1+t+t^2+t^3+t^4+t^5+\frac{1}{t-1}\right)\cdot dt$

$$= 6t + 3t^2 + 2t^3 + \frac{3}{2}t^4 + \frac{6}{5}t^5 + t^6 + \operatorname{Log}|t-1| + K$$

finalement

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\cdot dx = 6x^{1/6} + 3x^{1/3} + 2x^{1/2} + \frac{3}{2}x^{2/3} + \frac{6}{5}x^{5/6} + x + \operatorname{Log}|x^{1/6}-1| + K$$

3) Calculons $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$. Posons $\boxed{tg(x/2) = t}$

alors $d(tg\, x/2) = dt$

i.e $\frac{1}{2}(1+tg^2 x/2)\cdot dx = dt$

donc $\boxed{dx = \frac{2\cdot dt}{1+t^2}}$

d'autre part, $\sin x = \sin(2\cdot x/2) = 2\sin x/2 \cdot \cos x/2 = \frac{2\sin x/2\, \cos^2 x/2}{\cos x/2}$

i.e $\boxed{\sin x = (2\, tg\tfrac{x}{2})\cdot\frac{1}{1+tg^2 x/2} = \frac{2t}{1+t^2}}$

On est amené à calculer

$$\int \frac{\cancel{(1+t^2)}}{\cancel{2}t}\cdot\frac{\cancel{2}\cdot dt}{\cancel{(1+t^2)}} = \int\frac{dt}{t} = \operatorname{Log}|t| + K$$

En résumé : $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x} = \operatorname{Log}|tg(x/2)| + K$

Remarque sur $\int \frac{sh x . ch x}{(sh^2 x - 1)(sh^4 x + sh^2 x + 1)} . dx$

Notons que $d(sh^2 x) = 2 sh x . ch x . dx$

Alors, on pose $sh^2 x = t$

L'intégrale prend la forme suivante

$$\int \frac{dt}{(t-1).(t^2+t+1)}.$$

La fraction se décompose sous la forme

$$F(t) = \frac{a}{t-1} + \frac{bt+c}{t^2+t+1}, \text{où } a,b,c \in \mathbb{R}.$$

Il suffit alors de calculer :

$$\int \frac{a}{t-1} . dt = a . \log|t-1| + K$$

et $b \int \frac{t . dt}{t^2+t+1} + c \int \frac{dt}{t^2+t+1}$.