Calculs de primitives

Exercice 1.

Calculer

1.
$$F_1(x)=\int_0^x \cos^3(t)\,dt$$
2.
$$F_2(x)=\int_0^x \sin^3(t)\,dt$$
3.
$$F_3(x)=\int_0^x \cos^4(t)\,dt$$
4.
$$F_4(x)=\int_0^x \sin^4(t)\,dt$$
5.
$$F_5(t)=\int_0^x \cos^2(t)\sin^2(t)\,dt$$
6.
$$F_6(x)=\int_0^x \cos^2(t)\sin^3(t)\,dt$$
7.
$$F_7(x)=\int_0^x \cos(t)\sin^4(t)\,dt$$

Allez à : Correction exercice 1

Exercice 2.

Calculer
$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(t)\sin^2(t)\,dt$$

Allez à : Correction exercice 2

Exercice 3.

1.
$$F_1(x)=\int_0^x \mathrm{ch}^3(t)\,dt$$
2.
$$F_2(x)=\int_0^x \mathrm{sh}^3(t)\,dt$$
3.
$$F_3(x)=\int_0^x \mathrm{ch}^4(t)\,dt$$
4.

$$F_4(x) = \int_0^x \mathrm{sh}^4(t)\, dt$$

5.

$$F_5(t) = \int_0^x \mathrm{ch}^2(t)\, \mathrm{sh}^2(t)\, dt$$

6.

$$F_6(x) = \int_0^x \mathrm{ch}^2(t)\, \mathrm{sh}^3(t)\, dt$$

7.

$$F_7(x) = \int_0^x \mathrm{ch}(t)\, \mathrm{sh}^4(t)\, dt$$

Allez à : Correction exercice 3

Exercice 4.

Calculer les primitives suivantes :

1.

$$F_1(x) = \int (\cos(x)\cos(2x) + \sin(x)\sin(2x))dx$$

2.

$$F_2(x) = \int \cos(x)\sin^4(x)\, dx$$

3.

$$F_3(x) = \int \cos^6(x)\, dx$$

4.

$$F_4(x) = \int \sin^4(x)\, dx$$

5.

$$F_5(x) = \int \sin^3(x)\cos^2(x)\, dx$$

6.

$$F_6(x) = \int \mathrm{ch}^2(x)\, \mathrm{sh}^2(x)\, dx$$

7.

$$F_7(x) = \int \mathrm{sh}(x)\, \mathrm{ch}^3(x)\, dx$$

8.

$$F_8(x) = \int \mathrm{ch}(x)\, \mathrm{sh}^3(x)\, dx$$

Allez à : Correction exercice 4

Exercice 5.

1.

$$F_1(x) = \int_0^x e^t \cos(t)\, dt$$

2.

$$F_2(x) = \int_0^x e^t \sin(t)\, dt$$

3.

$$F_3(x) = \int_0^x e^{-t} \cos(2t)\, dt$$

4.

$$F_4(x) = \int_0^x e^{-t} \sin(2t)\, dt$$

5.

$$F_5(x) = \int_0^x e^{2t} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) dt$$

6.

$$F_6(x) = \int_0^x e^{-2t} \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) dt$$

7.

$$F_7(x) = \int_0^x e^{-t} \cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) dt$$

8.

$$F_8(x) = \int_0^x e^{t} \cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right) dt$$

Allez à : Correction exercice 5

Exercice 6.

1.

$$F_1(x) = \int_0^x te^t dt$$

2.

$$F_2(x) = \int_0^x t^2 e^t dt$$

3.

$$F_3(x) = \int_0^x t^3 e^t dt$$

4.

$$F_4(x) = \int_1^x t \ln(t)\, dt$$

5.

$$F_5(x) = \int_1^x t^2 \ln(t)\, dt$$

6.

$$F_6(x) = \int_1^x t^3 \ln(t)\, dt$$

7.

$$F_7(x) = \int_0^x t \sin(t)\, dt$$

8.

$$F_8(x) = \int_0^x t^2 \sin(t)\, dt$$

9.

$$F_9(x) = \int_0^x t^3 \sin(t)\, dt$$

10.

$$F_{10}(x) = \int_0^x t \cos(t)\, dt$$

11.

$$F_{11}(x) = \int_0^x t^2 \cos(t)\, dt$$

12.

$$F_{12}(x) = \int_0^x t^3 \cos(t)\, dt$$

13.

$$F_{13}(x) = \int_0^x \arcsin(t)\, dt$$

14.

$$F_{14}(x) = \int_0^x t \arcsin(t) dt$$

15.

$$F_{15}(x) = \int_0^x \arctan(t)\, dt$$

Allez à : Correction exercice 6

Exercice 7.

1.

$$F_1(x) = \int e^x \cos(x)\, dx$$

2.

$$F_2(x) = \int \frac{\ln(x)}{x^n} dx\,, \qquad n \neq 1$$

3.

$$F_3(x) = \int x \arctan(x)\, dx$$

4.

$$F_4(x) = \int (x^2 + x + 1) e^x dx$$

Allez à : Correction exercice 7

Exercice 8.

Calculer

1.

$$F_1(x) = \int \frac{dx}{x(x-1)}$$

2.

$$F_2(x) = \int \frac{dx}{1-x^2}$$

3.

$$F_3(x) = \int \frac{dx}{x(x^2-1)}$$

4.
$$F_4(x) = \int \frac{x^3}{x^2+4}\,dx$$
5.
$$F_5(x) = \int \frac{x}{x^2+4}\,dx$$
6.
$$F_6(x) = \int \frac{x^2}{x^2+3}\,dx$$
7.
$$F_7(x) = \int \frac{1}{x^2(x^2-1)}\,dx$$
8.
$$F_8(x) = \int \frac{1}{x(x^2-1)^2}\,dx$$
9.
$$F_9(x) = \int \frac{1}{(x^2-1)^2}\,dx$$
10.
$$F_{10}(x) = \int \frac{1}{x^2(x^2-1)^2}\,dx$$
11.
$$F_{11}(x) = \int \frac{x+1}{(x^2+1)^2}\,dx$$
12.
$$F_{12}(x) = \int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,dx$$
13.
$$F_{13}(x) = \int \frac{x}{(x-1)(x+1)(x+3)}\,dx$$
14.
$$F_{14}(x) = \int \frac{dx}{x^4-x^2-2}$$
15.
$$F_{15}(x) = \int \frac{dx}{(x+2)(x^2+2x+5)}$$
16.
$$F_{16}(x) = \int \frac{16dx}{x^2(x^2+2)^3}$$
17.
$$F_{17}(x) = \int \frac{x^4+1}{x(x-1)^3}\,dx$$
18.
$$F_{18}(x) = \int \frac{1}{x(x^2+1)^2}\,dx$$
19.

Trouver une primitive de

$$t \to \frac{t}{t^2 + 2t + 4}$$

Allez à : Correction exercice 8

Exercice 9.

1. Calculer

$$G(t) = \int \frac{-t + 1}{t^2 + 2t + 5} dt$$

2. Calculer

$$F(t) = \int \frac{\ln(t^2 + 2t + 5)}{(t - 1)^2} dt$$

Allez à : Correction exercice 9

Exercice 10.

1. Décomposer en éléments simple

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x^2(x + 1)}$$

2. Calculer

$$F(x) = \int \frac{1}{x^2} \ln(x^2 + x)\, dx$$

A l'aide d'une intégration par partie

Allez à : Correction exercice 10

Exercice 11.

Calculer les primitives suivantes :

1.

$$F_1(x) = \int \frac{dx}{x^2 + 5}$$

2.

$$F_2(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 5}}$$

3.

$$F_3(x) = \int e^x \sin(e^x)\, dx$$

4.

$$F_4(x) = \int \tan^3(x)\, dx$$

5.

$$F_5(x) = \int \frac{1}{\tan^3(x)}\, dx$$

6.

$$F_6(x) = \int \frac{2x + 3}{(x^2 + 3x + 7)^m} dx\, , m \neq 1$$

7.

$$F_7(x) = \int \frac{\ln(x)}{x} dx$$

8.

$$F_8(x) = \int \frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}^5(x)} dx$$

Allez à : Correction exercice 11

Exercice 12.

Calculer

1.

$$F_1(x) = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} \quad a \neq 0$$

2.

$$F_2(x) = \int \frac{dx}{(1 + x^2)^2}$$

3.

$$F_3(x) = \int \frac{x^3}{x^2 - 4} dx$$

4.

$$F_4(x) = \int \frac{4x dx}{(x - 2)^2}$$

5.

$$F_5(x) = \int \frac{dx}{x^2 + x + 1}$$

6.

$$F_6(t) = \int \frac{dt}{t^2 + 2t - 1}$$

7.

$$F_7(t) = \int \frac{(3t + 1)dt}{(t^2 - 2t + 10)^2}$$

8.

$$F_8(t) = \int \frac{(3t + 1)dt}{t^2 - 2t + 10}$$

9.

$$F_9(t) = \int \frac{dt}{t^3 + 1}$$

10.

$$F_{10}(x) = \int \frac{x^3 + 2}{(x + 1)^3} dx$$

11.

$$F_{11}(x) = \int \frac{x + 1}{x(x - 2)^2} dx$$

Allez à : Correction exercice 12

Exercice 13.

Calculer les intégrales de fractions rationnelles suivantes.

1.

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 2}$$

2.

$$I_2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1 - x^2}$$

3.

$$I_3 = \int_2^3 \frac{(2x+1)dx}{x^2+x-3}$$

4.

$$I_4 = \int_0^2 \frac{x}{x^4+16}dx$$

5.

$$I_5 = \int_0^1 \frac{5x+6}{(x^2-4)(x+2)}dx$$

6.

$$I_6 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x-1}{x^2(x^2+1)}dx$$

Allez à : Correction exercice 13

Exercice 14.

Calculer les primitives suivantes :

1.

$$F_1(x) = \int \frac{\cos^3(x)}{\sin^5(x)}dx$$

2.

$$F_2(x) = \int \frac{\sin^3(x)}{1+\cos(x)}dx$$

3.

$$F_3(x) = \int \frac{dx}{\cos^4(x)+\sin^4(x)}$$

4.

$$F_4(x) = \int \frac{\cos(x)-2}{\sin(x)}dx$$

Allez à : Correction exercice 14

Exercice 15.

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos(x)\sin(x)}$$

Allez à : Correction exercice 15

Exercice 16.

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3(t)}{\sin^4(t)}dt$$

Allez à : Correction exercice 16

Exercice 17.

1. Déterminer une primitive de la fonction f définie par :

$$f(t) = \frac{1}{\sin(2t)}$$

2. A l'aide du changement de variable $x = 2t$, calculer
$$F(x) = \int \frac{dx}{\sin(x)}$$

Allez à : Correction exercice 17

Exercice 18.

Calculer sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
$$F(x) = \int \frac{2dx}{1 + \tan(x)}$$

Allez à : Correction exercice 18

Exercice 19.

Calculer
$$F(t) = \int \frac{1}{1 + \mathrm{ch}(t)} dt$$

Allez à : Correction exercice 19

Exercice 20.

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par :
$$f(x) = \frac{1 + \mathrm{sh}(x)}{1 + \mathrm{ch}(x)}$$

Allez à : Correction exercice 20

Exercice 21.
$$\int \frac{dx}{(\mathrm{ch}(x) + 1)^2}$$

Allez à : Correction exercice 21

Exercice 22.

Calculer pour $x > 0$
$$F(x) = \int \frac{\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x) - 1} dx$$

Allez à : Correction exercice 22

Exercice 23.

Calculer
$$\int \frac{2 - \mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x)}{2\,\mathrm{ch}(x)} dx$$

Allez à : Correction exercice 23

Exercice 24.

1. Décomposer en élément simple la fraction
$$f(x) = \frac{1}{x(x-1)^2}$$

2. Calculer
$$F(t) = 2\int \frac{dt}{\mathrm{ch}(t)\,\mathrm{sh}^3(t)}$$

A l'aide du changement de variable $x = \text{ch}^2(t)$

Allez à : Correction exercice 24

Exercice 25.

Calculer

$$F(x) = \int (3t^2 - 2t)\ln(t^2 + 1)\, dt$$

Allez à : Correction exercice 25

Exercice 26.

A l'aide d'une intégration par partie calculer les intégrales suivantes

a.

$$I_1 = \int_1^e t\ln(t)\, dt$$

b.

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\, dt$$

c.

$$I_3 = \int_0^{\sqrt{3}} 3x^2\ln(x^2 + 1)\, dx$$

Allez à : Correction exercice 26

Exercice 27.

1. Calculer

$$\int \frac{2x}{(x^2 - 1)^2}\, dx$$

2. Calculer sur $]1, +\infty[$

$$G(x) = \int \frac{2x}{(x^2 - 1)^2}\ln(x)\, dx$$

Allez à : Correction exercice 27

Exercice 28.

Calculer

$$\int \frac{1}{(x + 1)^2}\arctan(x)\, dx$$

Allez à : Correction exercice 28

Exercice 29.

Calculer

1.

$$F_1(x) = \int \frac{1}{\sqrt{2 + x} + \sqrt[3]{2 + x}}\, dx\,; \qquad t = \sqrt[6]{2 + x}$$

Avec $x \in]-2, +\infty[$

2.

$$F_2(x) = \int \frac{1}{((x - 1)^2 - 4)^2}\, dx\,; \qquad \frac{x - 1}{2} = \text{th}(u)$$

Avec $x \in]-1,3[$

3.

$$F_3(x) = \int (\arcsin(x))^2 dx$$

4.
$$F_4(x) = \int x^2\sqrt{1 + x^3}dx$$

Allez à : Correction exercice 29

Exercice 30.

1. Calculer

$$F(t) = 2\int \frac{t^2}{t^2 - 1}\, dt$$

2. En déduire

$$G(x) = \int \sqrt{e^x + 1}dx$$

A l'aide du changement de variable $t = \sqrt{e^x + 1}$

Allez à : Correction exercice 30

Exercice 31.

Calculer les primitives suivantes sur l'intervalle I :

1. $I =]1, +\infty[$

$$F_1(x) = \int \frac{dx}{x + \sqrt{x - 1}}$$

2. $I = \mathbb{R}^{+*}$

$$F_2(x) = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

3. $I = \mathbb{R}$

$$F_3(x) = \int \frac{x}{\sqrt{9 + 4x^2}}dx$$

4. $I = \left]\frac{1-\sqrt{2}}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right[$

$$F_4(x) = \int \frac{x + 1}{\sqrt{-4x^2 + 4x + 1}}dx$$

5. $I = \left]-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right[$

$$F_5(x) = \int \frac{8x - 3}{\sqrt{12x - 4x^2 - 5}}dx$$

6. $I =]1, +\infty[$

$$F_6(x) = \int \sqrt{x^2 - 1}dx$$

7. $I =]1,4[$

$$F_7(x) = \int \frac{x\sqrt{x}}{x^2 - 5x + 4}dx$$

8. $I =]-1,1[$

$$F_8(x) = \int \frac{1}{1 - t}\sqrt{\frac{1 - t}{1 + t}}dt$$

Allez à : Correction exercice 31

Exercice 32.

Calculer

$$F(x)=\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-x}}$$

Allez à : Correction exercice 32

Exercice 33.

1. Calculer

$$F(x)=\int\frac{dx}{x^2(x-1)}$$

2. Calculer

$$G(t)=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t(t+1)\left(\sqrt{\frac{t}{t+1}}-\frac{t}{t+1}\right)}$$

A l'aide du changement de variable $x=\sqrt{\frac{t}{t+1}}$

Allez à : Correction exercice 33

Exercice 34.

1.

$$F_1(x)=\int_0^x (t^2+1)\arctan(t)\,dt$$

2.

$$F_2(x)=\int_0^x (t+1)\arcsin(t)\,dt$$

Allez à : Correction exercice 34

CORRECTION

Correction exercice 1.

1. On peut mettre $\cos^3(t)$ sous la forme $f(\sin(t))\cos(t)$ car la puissance de $\cos$ est impaire.

$$F_1(x)=\int_0^x\cos^3(t)\,dt=\int_0^x\cos^2(t)\cos(t)\,dt=\int_0^x(1-\sin^2(t))\cos(t)\,dt$$

On pose $u=\sin(t)\Rightarrow du=\cos(t)\,dt$

$$t=0\Rightarrow u=\sin(0)=0$$
$$t=x\Rightarrow u=\sin(x)$$

$$F_1(x)=\int_0^{\sin(x)}(1-u^2)du=\left[u-\frac{u^3}{3}\right]_0^{\sin(x)}=\sin(x)-\frac{\sin^3(x)}{3}$$

2. On peut mettre $\sin^3(t)$ sous la forme $f(\cos(t))\sin(t)$ car la puissance de $\sin$ est impaire.

$$F_2(x)=\int_0^x\sin^3(t)\,dt=\int_0^x\sin^2(t)\sin(t)\,dt=-\int_0^x(1-\cos^2(t))(-\sin(t))dt$$

On pose $u=\cos(t)\Rightarrow du=-\sin(t)\,dt$

$$t=0\Rightarrow u=\cos(0)=1$$

$$t=x\Rightarrow u=\cos(x)$$

$$F_2(x)=-\int_1^{\cos(x)}(1-u^2)du=-\left[u-\frac{u^3}{3}\right]_1^{\cos(x)}=-\left(\cos(x)-\frac{\cos^3(x)}{3}\right)+\left(1-\frac{1}{3}\right)$$

$$=-\cos(x)+\frac{\cos^3(x)}{3}+\frac{2}{3}$$

3. Ici les puissances de $\sin$ et $\cos$ sont paires (respectivement 0 et 4) on doit linéariser $\cos^4(t)$

$$(\cos(t))^4=\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^4=\frac{e^{4it}+4e^{2it}+6+4e^{-2it}+e^{4it}}{16}=\frac{e^{4it}+e^{4it}+4\left(e^{2it}+e^{-2it}\right)+6}{16}$$

$$=\frac{2\cos(4t)+4\times 2\cos(2t)+6}{16}=\frac{\cos(4t)+4\cos(2t)+3}{8}$$

$$F_3(x)=\frac{1}{8}\int_0^x(\cos(4t)+4\cos(2t)+3)dt=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}\sin(4t)+\frac{4}{2}\sin(2t)+3t\right]_0^x$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\sin(4x)+\frac{4}{2}\sin(2x)+3x\right)=\frac{1}{32}\sin(4x)+\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{3}{8}x$$

4. Ici les puissances de $\sin$ et $\cos$ sont paires (respectivement 4 et 0) on doit linéariser $\sin^4(t)$

$$(\sin(t))^4=\left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^4=\frac{e^{4it}-4e^{2it}+6-4e^{-2it}+e^{4it}}{16}=\frac{e^{4it}+e^{4it}-4\left(e^{2it}+e^{-2it}\right)+6}{16}$$

$$=\frac{2\cos(4t)-4\times 2\cos(2t)+6}{16}=\frac{\cos(4t)-4\cos(2t)+3}{8}$$

$$F_4(x)=\frac{1}{8}\int_0^x(\cos(4t)-4\cos(2t)+3)dt=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}\sin(4t)-\frac{4}{2}\sin(2t)+3t\right]_0^x$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\sin(4x)-\frac{4}{2}\sin(2x)+3x\right)=\frac{1}{32}\sin(4x)-\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{3}{8}x$$

5. Ici les puissances de $\sin$ et $\cos$ sont paires (respectivement 2 et 2) on doit linéariser $\cos^2(t)\sin^2(t)$

$$\cos^2(t)\sin^2(t)=\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^2\left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^2=\left(\frac{e^{2it}+2+e^{-2it}}{4}\right)\left(\frac{e^{2it}-2+e^{-2it}}{-4}\right)$$

$$=\frac{e^{4it}-2e^{2it}+1+2e^{2it}-4+2e^{-2it}+1-2e^{-2it}+e^{-4it}}{-16}=\frac{e^{4it}+e^{-4it}-2}{-16}$$

$$=\frac{2\cos(4t)-2}{-16}=-\frac{1}{8}\cos(4t)+\frac{1}{8}$$

$$F_5(t)=\frac{1}{8}\int_0^x(-\cos(4t)+1)dt=-\frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}\sin(4t)+t\right]_0^x=-\frac{1}{32}\sin(4x)-\frac{x}{8}$$

6. On peut mettre $\cos^2(t)\sin^3(t)$ sous la forme $f(\cos(t))\sin(t)$ car la puissance de $\sin$ est impaire.

$$F_6(x)=\int_0^x\cos^2(t)\sin^3(t)\,dt=-\int_0^x\cos^2(t)\sin^2(t)\,(-\sin(t))dt$$

$$=-\int_0^x\cos^2(t)\,(1-\cos^2(t))(-\sin(t))dt$$

On pose $u=\cos(t)\Rightarrow du=-\sin(t)\,dt$

$$t=0\Rightarrow u=\cos(0)=1$$

$$t=x\Rightarrow u=\cos(x)$$

$$F_6(x) = -\int_1^{\cos(x)} u^2(1-u^2)dt = \int_1^{\cos(x)} (u^4-u^2)dt = \left[\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3}\right]_1^{\cos(x)}$$
$$= \frac{\cos^5(x)}{5} - \frac{\cos^3(x)}{3} - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right) = \frac{\cos^5(x)}{5} - \frac{\cos^3(x)}{3} + \frac{2}{15}$$

7. $\cos(t)\sin^4(t)$ est sous la forme $f(\sin(t))\cos(t)$ car la puissance de $\cos$ est impaire.

   On pose $u = \sin(t) \Rightarrow du = \cos(t)\,dt$

$$t = 0 \Rightarrow u = \sin(0) = 0$$
$$t = x \Rightarrow u = \sin(x)$$
$$F_7(x) = \int_0^{\sin(x)} t^4 dt = \left[\frac{t^5}{5}\right]_0^{\sin(x)} = \frac{\sin^5(x)}{5}$$

Allez à : Exercice 1

Correction exercice 2.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\sin^2(t)\cos(t)\,dt$$

On pose $x = \sin(t)$, $dx = \cos(t)\,dt$

$$t = 0 \Rightarrow x = \sin(0) = 0$$
$$t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$
$$I = \int_0^1 (1-x^2)x^2dx = \int_0^1 (x^2-x^4)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$$

Allez à : Exercice 2

Correction exercice 3.

1. On peut toujours poser $u = e^t$ mais parfois, il y a plus simple.

$$F_1(x) = \int_0^x \mathrm{ch}^3(t)\,dt = \int_0^x \mathrm{ch}^2(t)\,\mathrm{ch}(t)\,dt$$

On pose $u = \mathrm{sh}(t) \Rightarrow du = \mathrm{ch}(t)\,dt$, $\mathrm{ch}^2(t) = 1 + \mathrm{sh}^2(t) = 1 + u^2$

$$t = 0 \Rightarrow u = \mathrm{sh}(0) = 0$$
$$t = x \Rightarrow u = \mathrm{sh}(x)$$
$$F_1(x) = \int_0^{\mathrm{sh}(x)} (1+u^2)du = \left[u + \frac{\mathrm{u}^3}{3}\right]_0^{\mathrm{sh}(x)} = \mathrm{sh}(x) + \frac{\mathrm{sh}^3(x)}{3}$$

Allez à : Exercice 3

2. On peut toujours poser $u = e^t$ mais parfois, il y a plus simple.

$$F_2(x) = \int_0^x \mathrm{sh}^3(t)\,dt = \int_0^x \mathrm{sh}^2(t)\,\mathrm{sh}(t)\,dt$$

On pose $u = \mathrm{ch}(t) \Rightarrow du = \mathrm{sh}(t)\,dt$, $\mathrm{sh}^2(t) = \mathrm{ch}^2(t) - 1 = u^2 - 1$

$$t = 0 \Rightarrow u = \mathrm{ch}(0) = 1$$
$$t = x \Rightarrow u = \mathrm{ch}(x)$$
$$F_2(x) = \int_1^{\mathrm{ch}(x)} (u^2-1)du = \left[\frac{u^3}{3} - u\right]_1^{\mathrm{ch}(x)} = \frac{\mathrm{ch}^3(x)}{3} - \mathrm{ch}(x) - \left(\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{\mathrm{ch}^3(x)}{3} - \mathrm{ch}(x) + \frac{2}{3}$$

Allez à : Exercice 3

3. Ici les puissances de sh et ch sont paires (respectivement 0 et 4) on pose

$$u=e^t \Leftrightarrow t=\ln(u) \Rightarrow dt=\frac{du}{u}$$

$$\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^4=\frac{e^{4t}+4e^{2t}+6+4e^{-2t}+e^{-4t}}{16}=\frac{1}{16}u^4+\frac{1}{4}u^2+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}u^{-2}+\frac{1}{16}u^{-4}$$

$$t=0 \Rightarrow u=e^0=1$$

$$t=x \Rightarrow u=e^x$$

$$F_3(x)=\int_1^{e^x}\left(\frac{1}{16}u^4+\frac{1}{4}u^2+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}u^{-2}+\frac{1}{16}u^{-4}\right)\frac{du}{u}$$

$$=\frac{1}{16}\int_1^{e^x}u^3du+\frac{1}{4}\int_1^{e^x}udu+\frac{3}{8}\int_1^{e^x}\frac{1}{u}du+\frac{1}{4}\int_1^{e^x}u^{-3}du+\frac{1}{16}\int_1^{e^x}u^{-5}du$$

$$=\frac{1}{16}\left[\frac{u^4}{4}\right]_1^{e^x}+\frac{1}{4}\left[\frac{u^2}{2}\right]_1^{e^x}+\frac{3}{8}[\ln(u)]_1^{e^x}+\frac{1}{4}\left[\frac{u^{-2}}{-2}\right]_1^{e^x}+\frac{1}{16}\left[\frac{u^{-4}}{-4}\right]_1^{e^x}$$

$$=\frac{1}{64}(e^{4x}-1)+\frac{1}{8}(e^{2x}-1)+\frac{3}{8}(\ln(e^x)-\ln(1))-\frac{1}{8}(e^{-2x}-1)-\frac{1}{64}(e^{-4x}-1)$$

$$=\frac{1}{64}(e^{4x}-e^{-4x})+\frac{1}{8}(e^{2x}-e^{-2x})+\frac{3}{8}x=\frac{\operatorname{sh}(4x)}{32}+\frac{\operatorname{sh}(2x)}{4}+\frac{3x}{8}$$

Autre méthode

$$\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^4=\frac{e^{4t}+4e^{2t}+6+4e^{-2t}+e^{-4t}}{16}=\frac{e^{4t}+e^{-4t}+4(e^{2t}+e^{-2t})+6}{16}$$

$$=\frac{2\operatorname{ch}(4t)+4\times\operatorname{ch}(2t)+6}{16}=\frac{1}{8}\operatorname{ch}(4t)+\frac{1}{4}\operatorname{ch}(2t)+\frac{3}{8}$$

$$F_3(x)=\frac{1}{8}\int_0^x\operatorname{ch}(4t)\,dt+\frac{1}{4}\int_0^x\operatorname{ch}(2t)\,dt+\frac{3}{8}\int_0^x dt=\frac{1}{8}\left[\frac{\operatorname{sh}(4t)}{4}\right]_0^x+\frac{1}{4}\left[\frac{\operatorname{sh}(2t)}{2}\right]_0^x+\frac{3}{8}$$

$$=\frac{1}{32}\operatorname{sh}(4x)+\frac{1}{8}\operatorname{sh}(2x)+\frac{3x}{8}$$

Allez à : Exercice 3

4. Ici les puissances de sh et ch sont paires (respectivement 4 et 0) on pose

$$u=e^t \Leftrightarrow t=\ln(u) \Rightarrow dt=\frac{du}{u}$$

$$\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^4=\frac{e^{4t}-4e^{2t}+6-4e^{-2t}+e^{-4t}}{16}=\frac{1}{16}u^4-\frac{1}{4}u^2+\frac{3}{8}-\frac{1}{4}u^{-2}+\frac{1}{16}u^{-4}$$

$$t=0 \Rightarrow u=e^0=1$$

$$t=x \Rightarrow u=e^x$$

$$F_4(x)=\int_1^{e^x}\left(\frac{1}{16}u^4-\frac{1}{4}u^2+\frac{3}{8}-\frac{1}{4}u^{-2}+\frac{1}{16}u^{-4}\right)\frac{du}{u}$$

$$=\frac{1}{16}\int_1^{e^x}u^3du-\frac{1}{4}\int_1^{e^x}udu+\frac{3}{8}\int_1^{e^x}\frac{1}{u}du-\frac{1}{4}\int_1^{e^x}u^{-3}du+\frac{1}{16}\int_1^{e^x}u^{-5}du$$

$$=\frac{1}{16}\left[\frac{u^4}{4}\right]_1^{e^x}-\frac{1}{4}\left[\frac{u^2}{2}\right]_1^{e^x}+\frac{3}{8}[\ln(u)]_1^{e^x}-\frac{1}{4}\left[\frac{u^{-2}}{-2}\right]_1^{e^x}+\frac{1}{16}\left[\frac{u^{-4}}{-4}\right]_1^{e^x}$$

$$=\frac{1}{64}(e^{4x}-1)-\frac{1}{8}(e^{2x}-1)+\frac{3}{8}(\ln(e^x)-\ln(1))+\frac{1}{8}(e^{-2x}-1)-\frac{1}{64}(e^{-4x}-1)$$
$$=\frac{1}{64}(e^{4x}-e^{-4x})-\frac{1}{8}(e^{2x}-e^{-2x})+\frac{3}{8}x=\frac{\mathrm{sh}(4x)}{32}-\frac{\mathrm{sh}(2x)}{4}+\frac{3x}{8}$$

Autre méthode

$$\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^4=\frac{e^{4t}-4e^{2t}+6-4e^{-2t}+e^{-4t}}{16}=\frac{e^{4t}+e^{-4t}-4(e^{2t}+e^{-2t})+6}{16}$$
$$=\frac{2\,\mathrm{ch}(4t)-4\times\mathrm{ch}(2t)+6}{16}=\frac{1}{8}\mathrm{ch}(4t)+\frac{1}{4}\mathrm{ch}(2t)+\frac{3}{8}$$
$$F_4(x)=\frac{1}{8}\int_0^x\mathrm{ch}(4t)\,dt-\frac{1}{4}\int_0^x\mathrm{ch}(2t)\,dt+\frac{3}{8}\int_0^x dt=\frac{1}{8}\left[\frac{\mathrm{sh}(4t)}{4}\right]_0^x-\frac{1}{4}\left[\frac{\mathrm{sh}(2t)}{2}\right]_0^x+\frac{3}{8}$$
$$=\frac{1}{32}\mathrm{sh}(4x)-\frac{1}{8}\mathrm{sh}(2x)+\frac{3x}{8}$$

Allez à : Exercice 3

5. Ici les puissances de sh et ch sont paires (respectivement 2 et 2) on pose

$$u=e^t\Leftrightarrow t=\ln(u)\Rightarrow dt=\frac{du}{u}$$
$$\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2=\left(\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)\right)^2=\left(\frac{e^{2t}-e^{-2t}}{4}\right)^2=\frac{e^{4t}-2+e^{-4t}}{16}$$
$$t=0\Rightarrow u=e^0=1$$
$$t=x\Rightarrow u=e^x$$
$$F_5(t)=\frac{1}{16}\int_1^{e^x}(u^4-2+u^{-4})\frac{du}{u}=\frac{1}{16}\int_1^{e^x}\left(u^3-\frac{2}{u}+u^{-5}\right)du=\frac{1}{16}\left[\frac{u^4}{4}-2\ln(u)-\frac{u^{-4}}{4}\right]_1^{e^x}$$
$$=\frac{1}{16}\left(\frac{e^{4x}}{4}-2\ln(e^x)-\frac{e^{-4x}}{4}\right)-\frac{1}{16}\left(\frac{1}{4}-2\ln(1)-\frac{1}{4}\right)=\frac{e^{4x}-e^{-4x}}{64}-\frac{x}{8}=\frac{\mathrm{sh}(4x)}{32}-\frac{x}{8}$$

Autre méthode

$$\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2=\frac{e^{4t}-2+e^{-4t}}{16}=\frac{2\,\mathrm{ch}(4t)-2}{16}=\frac{1}{8}\mathrm{ch}(4t)-\frac{1}{8}$$
$$F_5(x)=\frac{1}{8}\int_0^x(\mathrm{ch}(4t)-1)dt=\frac{1}{8}\left[\frac{\mathrm{sh}(4t)}{4}-t\right]_0^x=\frac{\mathrm{sh}(4x)}{32}-\frac{x}{8}$$

Allez à : Exercice 3

6. On peut mettre $\mathrm{ch}^2(t)\,\mathrm{sh}^3(t)$ sous la forme $f(\mathrm{ch}(t))\,\mathrm{sh}(t)$ car la puissance de sh est impaire.

$$F_6(x)=\int_0^x\mathrm{ch}^2(t)\,\mathrm{sh}^3(t)\,dt=\int_0^x\mathrm{ch}^2(t)\,\mathrm{sh}^2(t)\,\mathrm{sh}(t)\,dt=\int_0^x\mathrm{ch}^2(t)\,(\mathrm{ch}^2(t)-1)\,\mathrm{sh}(t)\,dt$$

On pose $u=\mathrm{ch}(t)\Rightarrow du=\mathrm{sh}(t)\,dt$

$$t=0\Rightarrow u=\mathrm{ch}(0)=1$$
$$t=x\Rightarrow u=\mathrm{ch}(x)$$
$$F_6(x)=\int_1^{\mathrm{ch}(x)}t^2(t^2-1)dt=\int_1^{\mathrm{ch}(x)}(t^4-t^2)dt=\left[\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right]_1^{\mathrm{ch}(x)}=\frac{\mathrm{ch}^5(x)}{5}-\frac{\mathrm{ch}^3(x)}{3}-\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)$$
$$=\frac{\mathrm{ch}^5(x)}{5}-\frac{\mathrm{ch}^3(x)}{3}+\frac{2}{15}$$

Allez à : Exercice 3

7. $\text{ch}(t)\,\text{sh}^4(t)$ est de la forme $f(\text{sh}(t))\,\text{ch}(t)$
   On pose $u = \text{sh}(t) \Rightarrow du = \text{ch}(t)\,dt$
$$t = 0 \Rightarrow u = \text{sh}(0) = 0$$
$$t = x \Rightarrow u = \text{sh}(x)$$
$$F_7(x) = \int_0^{\text{sh}(x)} u^4 du = \frac{\text{sh}^5(x)}{5}$$

Allez à : Exercice 3

Correction exercice 4.

1. Avec la formule d'addition
$$\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) = \cos(a+b)$$
$$\cos(x)\cos(2x) + \sin(x)\sin(2x) = \cos(x-2x) = \cos(-x) = \cos(x)$$
$$F_1(x) = \int \cos(x)\,dx = \sin(x) + K$$

Allez à : Exercice 4

2. La puissance en $\cos(x)$ est impaire et celle en $\sin(x)$ est paire, on peut mettre $\cos(x)$ en facteur.
   On pose $t = \sin(x)$, $dt = \cos(x)\,dx$
$$F_2(x) = \int t^4 dt = \frac{1}{5}t^5 + K = \frac{1}{5}\sin^5(t) + K$$

Allez à : Exercice 4

3. La puissance en $\cos(x)$ est paire et la puissance en $\sin(x)$ est paire (en fait elle est nulle), il faut linéariser.
$$\cos^6(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^6$$
$$= \frac{1}{64}\Big(\left(e^{ix}\right)^6 + 6\left(e^{ix}\right)^5\left(e^{-ix}\right) + 15\left(e^{ix}\right)^4\left(e^{-ix}\right)^2 + 20\left(e^{ix}\right)^3\left(e^{ix}\right)^{-3} + 15\left(e^{ix}\right)^2\left(e^{-ix}\right)^4 + 6\left(e^{ix}\right)\left(e^{-ix}\right)^5 + \left(e^{-ix}\right)^6\Big)$$
$$= \frac{1}{64}\left(e^{6ix} + 6e^{4ix} + 15e^{2ix} + 20 + 15e^{-2ix} + 6e^{-4ix} + e^{-6ix}\right)$$
$$= \frac{1}{64}\left(e^{6ix} + e^{-6ix} + 6\left(e^{4ix} + e^{-4ix}\right) + 15\left(e^{2ix} + e^{-2ix}\right) + 20\right)$$
$$= \frac{1}{64}(2\cos(6x) + 6 \times 2\cos(4x) + 15 \times \cos(2x) + 20)$$
$$= \frac{1}{32}\cos(6x) + \frac{3}{16}\cos(4x) + \frac{15}{32}\cos(2x) + \frac{5}{16}$$
   Par conséquent :
$$F_3(x) = \frac{1}{32 \times 6}\sin(6x) + \frac{3}{16 \times 4}\sin(4x) + \frac{15}{32 \times 2}\sin(2x) + \frac{5}{16}x + K$$
$$= \frac{1}{192}\sin(6x) + \frac{3}{64}\sin(4x) + \frac{15}{64}\sin(2x) + \frac{5}{16}x + K$$

Allez à : Exercice 4

4. La puissance en $\cos(x)$ est paire et la puissance en $\sin(x)$ est paire, il faut linéariser.

$$\sin^4(x)=\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4=\frac{1}{16}\left(e^{4ix}+4e^{2ix}+6+4e^{-2ix}+e^{-4ix}\right)$$
$$=\frac{1}{16}\left(e^{4ix}+e^{-4ix}\right)+4\left(e^{2ix}+e^{-2ix}+6\right)=\frac{1}{16}(2\cos(4x)+4\times 3\cos(2x)+6)$$
$$=\frac{1}{8}\cos(4x)+\frac{3}{4}\cos(2x)+\frac{3}{8}$$

Par conséquent :

$$F_4(x)=\frac{1}{8\times 4}\sin(4x)+\frac{3}{4\times 2}\sin(2x)+\frac{3x}{8}+K=\frac{1}{32}\sin(4x)+\frac{3}{8}\sin(2x)+\frac{3x}{8}+K$$

Allez à : Exercice 4

5. La puissance en $\cos(x)$ est paire et celle en $\sin(x)$ est impaire, on peut mettre $\sin(x)$ en facteur.

$$F_5(x)=\int\sin^3(x)\cos^2(x)\,dx=\int\sin^2(x)\cos^2(x)\sin(x)\,dx=\int(1-\cos^2(x))\cos^2(x)\sin(x)\,dx$$
$$=\int(\cos^2(x)-\cos^4(x))\sin(x)\,dx$$

On pose $t=\cos(x)$ donc $dt=-\sin(x)\,dx$

$$F_5(x)=\int(t^2-\mathrm{t}^4)(-dt)=-\int(t^2-t^4)dt=-\left(\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{5}t^5\right)+K=-\frac{1}{3}\cos^3(x)+\frac{1}{5}\cos^5(x)+K$$

En fait rien n'empêche de linéariser $\sin^3(x)\cos^2(x)=\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3\times\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2=\cdots$

Mais la première méthode est bien plus simple.

Allez à : Exercice 4

6. La puissance de $\mathrm{ch}(x)$ est paire et la puissance de $\mathrm{sh}(x)$ est paire, il faut poser $t=e^x$

$$\mathrm{ch}^2(x)\,\mathrm{sh}^2(x)=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2=\left(\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\right)^2=\frac{1}{16}(e^{2x}-e^{-2x})^2$$
$$=\frac{1}{16}(e^{4x}-2+e^{-4x})=\frac{1}{16}e^{4x}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}e^{-4x}$$

Par conséquent :

$$F_6(x)=\int\mathrm{ch}^2(x)\,\mathrm{sh}^2(x)\,dx=\int\left(\frac{1}{16}e^{4x}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}e^{-4x}\right)dx=\frac{1}{64}e^{4x}-\frac{x}{8}-\frac{1}{64}e^{-4x}+K$$
$$=\frac{1}{32}\mathrm{sh}(4x)-\frac{x}{8}+K$$

Allez à : Exercice 4

7. La puissance de $\mathrm{sh}(x)$ est impaire, il peut poser $t=\mathrm{ch}(x)$ donc $dt=\mathrm{sh}(x)\,dx$

$$F_7(x)=\int\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}^3(x)\,dx=\int t^3dt=\frac{t^4}{4}+K=\frac{\mathrm{ch}^4(x)}{4}+K$$

On peut aussi poser $t=e^x$ mais la première méthode est bien plus simple.
Autre méthode (moins bonne), la puissance de $\mathrm{ch}(x)$ est impaire on peut poser $t=\mathrm{sh}(x)$ donc $dt=\mathrm{ch}(x)\,dx$

$$F_7(x)=\int\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}^3(x)\,dx=\int\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}^2(x)\,\mathrm{ch}(x)dx=\int\mathrm{sh}(x)\,(1+\mathrm{sh}^2(x))\mathrm{ch}(x)dx$$
$$=\int t(1+t^2)dt=\int(t+t^3)dt=\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4}+K=\frac{\mathrm{ch}^2(x)}{2}+\frac{\mathrm{ch}^4(x)}{4}+K$$

Allez à : Exercice 4

8. La puissance de $\mathrm{ch}(x)$ est impaire, il peut poser $t=\mathrm{sh}(x)$ donc $dt=\mathrm{ch}(t)\,dt$

$$F_8(x)=\int\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}^3(x)\,dx=\int t^3dt=\frac{t^4}{4}+K=\frac{\mathrm{sh}^4(x)}{4}+K$$

Autre méthode (moins bonne)

La puissance de $\mathrm{sh}(x)$ est impaire, on peut poser $t=\mathrm{ch}(x)$ donc $dt=\mathrm{sh}(x)\,dx$

$$F_8(x)=\int \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}^3(x)\,dx=\int \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}^2(x)\,\mathrm{sh}(x)\,dx=\int \mathrm{ch}(x)\,(\mathrm{ch}^2(x)-1)\,\mathrm{sh}(x)\,dx$$
$$=\int t(t^2-1)dt=\int (t^3-t)dt=\frac{t^4}{4}-t+K=\frac{\mathrm{ch}^4(x)}{4}-\mathrm{ch}(x)+K'$$

Allez à : Exercice 4

Correction exercice 5.

1.

$F_1(x)=\int_0^x e^t\cos(t)\,dt$	
$u'(t)=e^t$	$u(t)=e^t$
$v(t)=\cos(t)$	$v'(t)=-\sin(t)$
$F_1(x)=\int_0^x e^t\cos(t)\,dt=[e^t\cos(t)]_0^x-$	$\int_0^x e^t(-\sin(t))dt$

$$F_1(x)=\int_0^x e^t\cos(t)\,dt=[e^t\cos(t)]_0^x+\int_0^x e^t\sin(t)\,dt$$

Il faut refaire une autre intégration par partie

$\int_0^x e^t\sin(t)\,dt$	
$u'(t)=e^t$	$u(t)=e^t$
$v(t)=\sin(t)$	$v'(t)=\cos(t)$
$\int_0^x e^t\sin(t)\,dt=[e^t\sin(t)]_0^x-$	$\int_0^x e^t\cos(t)\,dt$

$$\int_0^x e^t\sin(t)\,dt=[e^t\sin(t)]_0^x-\int_0^x e^t\cos(t)\,dt=[e^t\sin(t)]_0^x-F_1(x)$$

Ce que l'on remplace dans

$$F_1(x)=\int_0^x e^t\cos(t)\,dt=[e^t\cos(t)]_0^x+\int_0^x e^t\sin(t)\,dt=[e^t\cos(t)]_0^x+[e^t\sin(t)]_0^x-F_1(x)$$
$$\Leftrightarrow 2F_1(x)=[e^t\cos(t)]_0^x+[e^t\sin(t)]_0^x=e^x\cos(x)-1+e^x\sin(x)$$
$$\Leftrightarrow F_1(x)=\frac{1}{2}e^x\cos(x)-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^x\sin(x)$$

Remarque :

Lors de la seconde intégration par partie il faut continuer à intégrer e^x sinon on retombe sur la même intégrale.

On aurait aussi pu dériver e^x lors de la première intégration par partie et bien sûr dans la seconde aussi.

Allez à : Exercice 5

2.

Première méthode :

On fait exactement pareil.

Deuxième méthode :

On utilise le résultat ci-dessus

$$F_2(x)=\int_0^x e^t\sin(t)\,dt=[e^t\sin(t)]_0^x-F_1(x)$$

Puis

$$F_1(x)=\frac{1}{2}e^x\cos(x)+\frac{1}{2}e^x\sin(x)+K$$

$$F_2(x)=e^x\sin(x)-\left(\frac{1}{2}e^x\cos(x)+\frac{1}{2}e^x\sin(x)\right)+K'=-\frac{1}{2}e^x\cos(x)+\frac{1}{2}e^x\sin(x)+K'$$

Troisième méthode :

$$F_1(x)+iF_2(x)=\int_0^x e^t\cos(t)\,dt+i\int_0^x e^t\sin(t)\,dt=\int_0^x e^t(\cos(t)+i\sin(t))dt=\int_0^x e^te^{it}dt$$
$$=\int_0^x e^{(1+i)t}\,dt=\left[\frac{1}{1+i}e^{(1+i)t}\right]_0^x=\frac{1}{1+i}e^{(1+i)x}-\frac{1}{1+i}e^0=\frac{1-i}{2}e^xe^{ix}-\frac{1-i}{2}$$
$$=\frac{e^t}{2}(1-i)(\cos(x)+i\sin(x))-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}$$
$$=\frac{e^x}{2}(\cos(x)+\sin(x)+i(-\cos(x)+\sin(x))-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}$$

$F_1(x)$ est la partie réelle et $F_2(x)$ est la partie imaginaire

$$F_1(x)=\frac{e^x}{2}(\cos(x)+\sin(x))-\frac{1}{2}$$
$$F_2(x)=\frac{e^x}{2}(-\cos(x)+\sin(x))+\frac{1}{2}$$

On a en même temps $F_1(x)$ et $F_2(x)$.

Allez à : Exercice 5

3. Le plus simple serait de calculer $F_3(x)+iF_4(x)$ comme dans l'exercice ci-dessus
Pour changer, on va faire une intégration par parties en dérivant l'exponentielle et en intégrant le « $\cos(2t)$ »

$F_3(x)=\int_0^x e^{-t}\cos(2t)\,dt$	
$u'(t)=\cos(2t)$	$u(t)=\frac{1}{2}\sin(2t)$
$v(t)=e^{-t}$	$v'(t)=-e^{-t}$
$F_3(x)=\int_0^x e^{-t}\cos(2t)\,dt=\left[\frac{1}{2}e^{-t}\sin(2t)\right]_0^x-$	$\int_0^x(-e^{-t})\frac{1}{2}\sin(2t)\,dt$

$$F_3(x)=\int_0^x e^{-t}\cos(2t)\,dt=\left[\frac{1}{2}e^{-t}\sin(2t)\right]_0^x+\frac{1}{2}\int_0^x e^{-t}\sin(2t)\,dt$$

On refait une intégration par parties

$\int_0^x e^{-t}\sin(2t)\,dt$	
$u'(t)=\sin(2t)$	$u(t)=-\frac{1}{2}\cos(2t)$
$v(t)=e^{-t}$	$v'(t)=-e^{-t}$
$\int_0^x e^{-t}\sin(2t)\,dt\,)=\left[e^{-t}\left(-\frac{1}{2}\cos(2t)\right)\right]_0^x-$	$\int_0^x(-e^{-t})\left(-\frac{1}{2}\cos(2t)\right)dt$

$$\int_0^x e^{-t}\sin(2t)\,dt\,)=\left[e^{-t}\left(-\frac{1}{2}\cos(2t)\right)\right]_0^x-\frac{1}{2}\int_0^x e^{-t}\cos(2t)\,dt$$

Ce que l'on remplace dans

$$F_3(x)=\int_0^x e^{-t}\cos(2t)\,dt=\left[\frac{1}{2}e^{-t}\sin(2t)\right]_0^x+\frac{1}{2}\int_0^x e^{-t}\sin(2t)\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}e^{-t}\sin(2t)\right]_0^x+\frac{1}{2}\left(\left[e^{-t}\left(-\frac{1}{2}\cos(2t)\right)\right]_0^x-\frac{1}{2}\int_0^x e^{-t}\cos(2t)\,dt\right)$$
$$=\frac{1}{2}e^{-x}\sin(2x)-\frac{1}{4}e^{-x}\cos(2x)+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}F_3(x)$$

Donc

$$\left(1+\frac{1}{4}\right)F_3(x)=\frac{1}{2}e^{-x}\sin(2x)-\frac{1}{4}e^{-x}\cos(2x)+\frac{1}{4}$$

Puis

$$F_3(x)=\frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}e^{-x}\sin(2x)-\frac{1}{4}e^{-x}\cos(2x)+\frac{1}{4}\right)=\frac{2}{5}e^{-x}\sin(2x)-\frac{1}{5}e^{-x}\cos(2x)+\frac{1}{5}$$

Allez à : Exercice 5

4. On reprend l'égalité ci-dessus

$$F_3(x)=\int_0^x e^{-t}\cos(2t)\,dt=\left[\frac{1}{2}e^{-t}\sin(2t)\right]_0^x+\frac{1}{2}\int_0^x e^{-t}\sin(2t)\,dt\ =\frac{1}{2}e^{-x}\sin(2x)+\frac{1}{2}F_4(x)$$

Par conséquent

$$F_4(x)=2F_3(x)-e^{-x}\sin(2x)=2\left(\frac{2}{5}e^{-x}\sin(2x)-\frac{1}{5}e^{-x}\cos(2x)\right)-e^{-x}\sin(2x)$$

$$=-\frac{1}{5}e^{-x}\sin(2x)-\frac{2}{5}e^{-x}\cos(2x)$$

Et on rajoute comme d'habitude une constante

$$F_4(x)=-\frac{1}{5}e^{-x}\sin(2x)-\frac{2}{5}e^{-x}\cos(2x)+K$$

Allez à : Exercice 5

5.

$F_5(x)=\int_0^x e^{2t}\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)dt$	
$u'(t)=\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$	$u(t)=\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$
$v(t)=e^{2t}$	$v'(t)=2e^{2t}$
$F_5(x)=\int_0^x e^{2t}\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)dt=\left[e^{2t}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^x-$	$\int_0^x 2e^{2t}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)dt$

$$F_5(x)=\int_0^x e^{2t}\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)dt=\left[e^{2t}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^x-2\int_0^x e^{2t}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)dt$$

On fait une seconde intégration par partie

$\int_0^x e^{2t}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)dt$	
$u'(t)=\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$	$u(t)=-\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$
$v(t)=e^{2t}$	$v'(t)=2e^{2t}$
$\int_0^x e^{2t}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)dt=[e^{2t}\left(-\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^x-$	$\int_0^x 2e^{t}\left(-\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right)dt$

$$\int_0^x e^{2t}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)dt=[e^{2t}\left(-\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^x+2\int_0^x e^{t}\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)dt$$

$$=-2e^{2x}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+2F_5(x)$$

Ce que l'on remplace dans

$$F_5(x)=\int_0^x e^{2t}\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)dt=\left[e^{2t}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^x-2\int_0^x e^{2t}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)dt=F_5(x)$$

$$=\left[e^{2t}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^x-2\left(-2e^{2x}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+2F_5(x)\right)$$

Donc

$$5F_5(x)=e^{2x}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)-2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+4e^{2x}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + e^{2x}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + 4e^{2x}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

Et enfin

$$F_5(x) = \frac{1}{5}e^{2x}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{4}{5}e^{2x}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

Allez à : Exercice 5

6. On fait le changement de variable $u=-t \Leftrightarrow t=-u \Rightarrow dt=-du$

$$t=0 \Rightarrow u=0$$
$$t=x \Rightarrow u=-x$$

$$F_6(x) = \int_0^{-x} e^{2u}\cos\left(-u+\frac{\pi}{4}\right)(-du) = -\int_0^{-x} e^{2u}\cos\left(u-\frac{\pi}{4}\right)du = -F_5(-x)$$
$$= -\left(\frac{1}{5}e^{-2x}\sin\left(-x-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{4}{5}e^{2x}\cos\left(-x-\frac{\pi}{4}\right)\right) + K'$$
$$= \frac{1}{5}e^{-2x}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - \frac{4}{5}e^{2x}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + K'$$

Allez à : Exercice 5

7. On peut faire des intégrations par parties ou utiliser les résultats précédents en utilisant la formule

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$F_7(x) = \int_0^x e^{-t}\left(\cos(2t)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin(2t)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)dt$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\int_0^x e^{-t}\cos(2t)\,dt - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\int_0^x e^{-t}\sin(2t)\,dt = \frac{1}{2}F_3(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}F_4(x)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}e^{-x}\sin(2x) - \frac{1}{5}e^{-x}\cos(2x)\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{5}e^{-x}\sin(2x) - \frac{2}{5}e^{-x}\cos(2x)\right)$$
$$= \frac{2-\sqrt{3}}{10}e^{-x}\sin(2x) + \frac{\left(-1+2\sqrt{3}\right)}{10}e^{-x}\cos(2x)$$

Allez à : Exercice 5

8. On fait le changement de variable $u=-t \Leftrightarrow t=-u \Rightarrow dt=-du$

$$t=0 \Rightarrow u=0$$
$$t=x \Rightarrow u=-x$$

$$F_8(x) = \int_{-0}^{-x} e^{-u}\cos\left(-2u-\frac{\pi}{3}\right)(-du) = -\int_0^{-x} e^{-u}\cos(2u+\frac{\pi}{3})du = -F_7(-x)$$
$$= -\left(\frac{2-\sqrt{3}}{10}e^{x}\sin(-2x) + \frac{\left(-1+2\sqrt{3}\right)}{10}e^{x}\cos(-2x)\right)$$
$$= \frac{2-\sqrt{3}}{10}e^{x}\sin(2x) - \frac{\left(-1+2\sqrt{3}\right)}{10}e^{x}\cos(2x)$$

Allez à : Exercice 5

Correction exercice 6.

1.

$F_1(x) = \int_0^x te^t dt$	
$u'(t) = e^t$	$u(t) = e^t$
$v(t) = t$	$v'(t) = 1$

$F_1(x)=\int_0^x te^t dt=[te^t]_0^x-\quad\int_0^x 1\times e^t dt$

$$F_1(x)=\int_0^x te^t dt=[te^t]_0^x-\int_0^x e^t dt=xe^x-[e^t]_0^x=xe^x-e^x+1$$

Allez à : Exercice 6

2.

$F_2(x)=\int_0^x t^2e^t dt$	
$u'(t)=e^t$	$u(t)=e^t$
$v(t)=t^2$	$v'(t)=2t$
$F_2(x)=\int_0^x t^2e^t dt=[t^2e^t]_0^x-\quad\int_0^x 2te^t dt$	

$$F_2(x)=\int_0^x t^2e^t dt=[t^2e^t]_0^x-2\int_0^x te^t dt=x^2e^x-2F_1(x)=x^2e^x-2(x-1)e^x-2$$
$$=(x^2-2x+2)e^x-2$$

Allez à : Exercice 6

3.

$F_3(x)=\int_0^x t^3e^t dt$	
$u'(t)=e^t$	$u(t)=e^t$
$v(t)=t^3$	$v'(t)=3t^2$
$F_3(x)=\int_0^x t^3e^t dt=[t^3e^t]_0^x-\quad\int_0^x 3t^2e^t dt$	

$$F_3(x)=\int_0^x t^3e^t dt=[t^3e^t]_0^x-3F_2(t)=x^3e^x-3(x^2-2x+2)e^x+6$$
$$=(x^3-3x^2+6x-6)e^x+6$$

Allez à : Exercice 6

4.

$F_4(x)=\int_1^x t\ln(t)\,dt$	
$u'(t)=t$	$u(t)=\frac{t^2}{2}$
$v(t)=\ln(t)$	$v'(t)=\frac{1}{t}$
$F_4(x)=\int_1^x t\ln(t)\,dt=\left[\frac{t^2}{2}\ln(t)\right]_1^x-\quad\int_1^x \frac{t^2}{2}\times\frac{1}{t}dt$	

$$F_4(x)=\int_1^x t\ln(t)\,dt=\left[\frac{t^2}{2}\ln(t)\right]_1^x-\frac{1}{2}\int_1^x tdt=\frac{x^2}{2}\ln(x)-\frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_1^x=\frac{x^2}{2}\ln(x)-\frac{1}{4}(x^2-1)$$

Allez à : Exercice 6

5.

$F_5(x)=\int_1^x t^2\ln(t)\,dt$	
$u'(t)=t^2$	$u(t)=\frac{t^3}{3}$
$v(t)=\ln(t)$	$v'(t)=\frac{1}{t}$

$F_7(x) = \int_0^x t\sin(t)\,dt$	
$u'(t) = \sin(t)$	$u(t) = -\cos(t)$
$v(t) = t$	$v'(t) = 1$
$F_7(x) = \int_0^x t\sin(t)\,dt = [t(-\cos(t)]_0^x -$	$\int_0^x 1 \times (-\cos(t))dt$

$F_5(x) = \int_1^x t^2\ln(t)\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\ln(t)\right]_1^x -$	$\int \frac{t^3}{3} \times \frac{1}{t}dt$

$$F_5(x) = \int_1^x t^2\ln(t)\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\ln(t)\right]_1^x - \frac{1}{3}\int_1^x t^2 dt = \frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{1}{3}\left[\frac{t^3}{3}\right]_1^x = \frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{1}{9}(x^3-1)$$

Allez à : Exercice 6

6.

$F_6(x) = \int_1^x t^3\ln(t)\,dt$	
$u'(t) = t^3$	$u(t) = \frac{t^4}{4}$
$v(t) = \ln(t)$	$v'(t) = \frac{1}{t}$
$F_6(x) = \int_1^x t^3\ln(t)\,dt = \left[\frac{t^4}{4}\ln(t)\right]_1^x -$	$\int_1^x \frac{t^4}{4} \times \frac{1}{t}dt$

$$F_6(x) = \int_1^x t^3\ln(t)\,dt = \left[\frac{t^4}{4}\ln(t)\right]_1^x - \frac{1}{4}\int_1^x t^3 dt = \frac{x^4}{4}\ln(x) - \frac{1}{4}\left[\frac{t^4}{4}\right]_1^x = \frac{x^4}{4}\ln(x) - \frac{1}{16}(x^4-1)$$

Allez à : Exercice 6

7.

$$F_7(x) = \int_0^x t\sin(t)\,dt = [t(-\cos(t)]_0^x + \int_0^x \cos(t)\,dt = -x\cos(x) + [\sin(t)]_0^x$$
$$= -x\cos(x) + \sin(x)$$

Allez à : Exercice 6

8.

$F_8(x) = \int_0^x t^2\sin(t)\,dt$	
$u'(t) = \sin(t)$	$u(t) = -\cos(t)$
$v(t) = t^2$	$v'(t) = 2t$
$F_8(x) = \int_0^x t^2\sin(t)\,dt = [t^2(-\cos(t))]_0^x -$	$\int_0^x 2t(-\cos(t))dt$

$$F_8(x) = \int_0^x t^2\sin(t)\,dt = [t^2(-\cos(t))]_0^x + 2\int_0^x t\cos(t)\,dt$$

Il faut faire une seconde intégration par parties.

$\int_0^x t\cos(t)\,dt$	
$u'(t) = \cos(t)$	$u(t) = \sin(t)$
$v(t) = t$	$v'(t) = 1$
$\int_0^x t\cos(t)\,dt = [t\sin(t)]_0^x -$	$\int_0^x 1 \times \sin(t)\,dt$

$$\int_0^x t\cos(t)\,dt = [t\sin(t)]_0^x - \int_0^x \sin(t)\,dt = x\sin(x) - [-\cos(t)]_0^x = x\sin(x) + \cos(x) - 1$$

Ce que l'on remplace dans

$$F_8(x) = \int_0^x t^2 \sin(t)\,dt = [t^2(-\cos(t)]_0^x + 2\int_0^x t\cos(t)\,dt$$
$$= -x^2\cos(x) + 2(x\sin(x) + \cos(x) - 1) = (-x^2 + 2)\cos(x) + 2x\sin(x) - 2$$

Allez à : Exercice 6

9.

$F_9(x) = \int_0^x t^3 \sin(t)\,dt$	
$u'(t) = \sin(t)$	$u(t) = -\cos(t)$
$v(t) = t^3$	$v'(t) = 3t^2$
$F_9(x) = \int_0^x t^3 \sin(t)\,dt = [t^3(-\cos(t))]_0^x -$	$\int_0^x 3t^2(-\cos(t))dt$

$$F_9(x) = \int_0^x t^3 \sin(t)\,dt = [t^3(-\cos(t))]_0^x + 3\int_0^x t^2\cos(t)\,dt$$

Il faut faire une seconde intégration par parties.

$\int_0^x t^2 \cos(t)\,dt$	
$u'(t) = \cos(t)$	$u(t) = \sin(t)$
$v(t) = t^2$	$v'(t) = 2t$
$\int_0^x t^2\cos(t)\,dt = [t^2\sin(t)]_0^x -$	$\int_0^x 2t\sin(t)\,dt$

$$\int_0^x t^2\cos(t)\,dt = [t^2\sin(t)]_0^x - 2\int_0^x t\sin(t)\,dt = x^2\sin(x) - 2F_7(x)$$
$$= x^2\sin(x) - 2(-x\cos(x) + \sin(x)) = (x^2 - 2)\sin(x) + 2x\cos(x)$$

Ce que l'on remplace dans

$$F_9(x) = -x^3\cos(x) + 3\int_0^x t^2\cos(t)\,dt = -x^3\cos(x) + 3\big((x^2-2)\sin(x) + 2x\cos(x)\big)$$
$$= (-x^3 + 6x)\cos(x) + (3x^2 - 6)\sin(x)$$

Allez à : Exercice 6

10. On peut faire une intégration par parties mais on va voir une autre technique qui permet de calculer $F_{10}(x)$ et $F_7(x)$ en même temps.

$$F_{10}(x) + iF_7 = \int_0^x t\cos(t)\,dt + i\int_0^x t\sin(t)\,dt = \int_0^x t(\cos(t) + i\sin(t))dt = \int_0^x te^{it}dt$$

Et on fait une intégration par parties.

$F_{10}(x) + iF_7 = \int_0^x te^{it}dt$	
$u'(t) = e^{it}$	$u(t) = \frac{1}{i}e^{it} = -ie^{it}$
$v(t) = t$	$v'(t) = 1$
$F_{10}(x) + iF_7 = \int_0^x te^{it}dt = \left[-tie^{it}\right]_0^x -$	$\int_0^x 1 \times (-ie^{it})dt$

$$F_{10}(x)+iF_7=\int_0^x te^{it}dt=\left[-tie^{it}\right]_0^x+i\int_0^x e^{it}dt=ixe^{ix}+i\left[\frac{1}{i}e^{it}\right]_0^x=ixe^{ix}+\left(e^{ix}-1\right)$$
$$=-ixe^{ix}+e^{ix}-1=-ix(\cos(x)+i\sin(x))+\cos(x)+i\sin(x)-1$$
$$=-ix\cos(x)+x\sin(x)+\cos(x)+i\sin(x)-1$$
$$=(x\sin(x)+\cos(x)-1)+i(-x\cos(x)+\sin(x))$$
$$F_{10}(x)=x\sin(x)+\cos(x)-1$$
$$F_7(x)=-x\cos(x)+\sin(x)$$

Allez à : Exercice 6

11. On peut faire deux intégrations par parties ou calculer $F_{11}(x)+iF_8(x)$, nous allons voir une autre technique.

On pose $u=\frac{\pi}{2}-t\Leftrightarrow t=\frac{\pi}{2}-u\Rightarrow dt=-du$

$$t=0\Rightarrow u=\frac{\pi}{2}$$
$$t=x\Rightarrow u=\frac{\pi}{2}-x$$
$$F_{11}(x)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-x}\left(u-\frac{\pi}{2}\right)^2\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)dt=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-x}\left(u^2-\pi+\frac{\pi^2}{4}\right)\sin(u)\,du$$
$$=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\left(u^2-\pi+\frac{\pi^2}{4}\right)\sin(u)\,du-\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}\left(u^2-\pi+\frac{\pi^2}{4}\right)\sin(u)\,du=C_1-G(x)$$

Où

$$G(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}\left(u^2-\pi+\frac{\pi^2}{4}\right)\sin(u)\,du$$
$$C_1=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\left(u^2-\pi+\frac{\pi^2}{4}\right)\sin(u)\,du=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(u^2-\pi+\frac{\pi^2}{4}\right)\sin(u)\,du=G(0)$$

Et

$$G(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}\left(u^2-\pi+\frac{\pi^2}{4}\right)\sin(u)\,du$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}u^2\sin(u)\,du-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}u\sin(u)\,du+\frac{\pi^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}\sin(u)\,du$$
$$=F_8\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\pi F_7\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\frac{\pi^2}{4}[-\cos(u)]_0^{\frac{\pi}{2}-x}$$
$$=\left(-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2+1\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$
$$-\pi\left(-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)+\frac{\pi^2}{4}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+1\right)$$
$$=\left(1-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2+\pi x-x^2\right)\sin(x)+(\pi-2x)\cos(x)-\pi\left(-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin(x)+\cos(x)\right)$$
$$+\frac{\pi^2}{4}(-\sin(x)+1)$$
$$=(\pi-2x-\pi)\cos(x)+\left(1-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2+\pi x-x^2+\pi\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\frac{\pi^2}{4}\right)\sin(x)+\frac{\pi^2}{4}$$
$$=-2x\cos(x)+(1-x^2)\sin(x)+\frac{\pi^2}{4}$$

Comme $G(0)=\frac{\pi^2}{4}$

$$F_{11}(x)=-2x\cos(x)+(1-x^2)\sin(x)$$

Franchement c'est plus compliqué que de faire deux intégrations par parties, c'était juste pour varier les plaisirs.

Allez à : Exercice 6

12. Toutes les méthodes décrites ci-dessus fonctionnent, voyons une autre façon de faire :

On cherche une primitive de la forme

$$F_{12}(x)=(ax^3+bx^2+cx+d)\cos(x)+(a'x^3+b'x^2+c'x+d')\sin(x)+K$$

Où a,b,c,a',b' et c' sont des constantes réelles.

En faisant le changement de variables $u=-t$ on constate que F_{12} est une fonction paire, on peut alors améliorer la forme de la primitive

$$F_{12}(x)=(bx^2+d)\cos(x)+(a'x^3+c'x)\sin(x)+K$$

On dérive

$$\begin{aligned}F'_{12}(x)&=2bx\cos(x)-(bx^2+d)\sin(x)+(3a'x^2+c')\sin(x)+(a'x^3+c'x)\cos(x)\\&=(2b+a'x^3+c'x)\cos(x)+(-(bx^2+d)+3a'x^2+c')\sin(x)\\&=(a'x^3+(c'+2b)x)\cos(x)+\big((3a'-b)x^2+c'-d\big)\sin(x)\end{aligned}$$

$$F'_{12}(x)=x^3\cos(x)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a'x^3+(c'+2b)x=x^3\\(3a'-b)x^2+c'-d=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a'=1\\c'+2b=0\\3a'-b=0\\c'-d=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a'=1\\c'=-2b\\b=-3a'\\d=c'\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a'=1\\c'=6\\b=-3\\d=6\end{array}\right.$$

$$F_{12}(x)=(-3x^2+6)\cos(x)+(x^3+6x)\sin(x)+K$$

Comme $F_{12}(0)=\int_0^0 t^3\cos(t)\,dt=0$, et que

$$F_{12}(x)=(-30^2+6)\cos(0)+(0^3+6\times 0)\sin(0)+K=6+K$$

cela entraine que $K=-6$ et

$$F_{12}(x)=(-3x^2+6)\cos(x)+(x^3+6x)\sin(x)-6$$

Allez à : Exercice 6

13. Il faut faire une intégration par parties mais il n'y a qu'une fonction, alors on écrit $F_{13}(x)$ de la façon suivante :

$$F_{13}(x)=\int_0^x 1\times\arcsin(t)\,dt$$

$F_{13}(x)=\int_0^x 1\times\arcsin(t)\,dt$	
$u'(t)=1$	$u(t)=t$
$v(t)=\arcsin(t)$	$v'(t)=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
$F_{13}(x)=\int_0^x 1\times\arcsin(t)\,dt=[t\arcsin(t)]_0^x-$	$\int_0^x\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt$

$$F_{13}(x)=\int_0^x 1\times\arcsin(t)\,dt=[t\arcsin(t)]_0^x-\int_0^x\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$\int_0^x\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt$ peut se calculer directement en remarquant que $\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}=t(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}u'(t)\big(u(t)\big)^{-\frac{1}{2}}$ avec $u(t)=1-t^2$

Donc

$$\int_0^x\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt=\left[-\big(u(t)\big)^{\frac{1}{2}}\right]_0^x=-\big(u(x)\big)^{\frac{1}{2}}+\big(u(0)\big)^{\frac{1}{2}}=-\sqrt{1-x^2}+1$$

Sinon on pose $t=\sin(u) \Leftrightarrow u=\arcsin(t) \Rightarrow dt=\cos(u)\,du$

$$\sqrt{1-t^2}=\sqrt{1-\sin^2(u)}=\sqrt{\cos^2(u)}=|\cos(u)|$$

Mais $-1\le x\le 1$ donc $-1\le t\le 1$ donc on peut prendre $-\frac{\pi}{2}\le u\le\frac{\pi}{2}$ et alors $\cos(u)\ge 0$.

$$t=0\Rightarrow u=\arcsin(0)=0$$
$$t=x\Rightarrow u=\arcsin(x)$$

$$\int_0^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt=\int_0^{\arcsin(x)}\frac{\sin(u)}{\cos(u)}\cos(u)\,du=\int_0^{\arcsin(x)}\sin(u)\,du=[-\cos(u)]_0^{\arcsin(x)}$$
$$=-\cos(\arcsin(x))+\cos(0)=-\sqrt{1-x^2}+1$$

Encore une autre méthode, on fait le changement de variable $v=t^2$ parce que l'on a remarqué qu'au numérateur le « t » était, à une constante multiplicative près, la dérivée de v et que $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ ne dépend que de $v=t^2$.

$$dv=2tdt$$
$$t=0\Rightarrow v=0$$
$$t=x\Rightarrow v=x^2$$

$$\int_0^x\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt=\frac{1}{2}\int_0^{x^2}\frac{dv}{\sqrt{1-v}}=\frac{1}{2}\int_0^{x^2}(1-v)^{-\frac{1}{2}}dv=\frac{1}{2}\left[-2(1-v)^{\frac{1}{2}}\right]_0^{x^2}=-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+1$$

$$F_{13}(x)=[t\arcsin(t)]_0^x-\int_0^x\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt=x\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}-1$$

Allez à : Exercice 6

14.

$F_{14}(x)=\int_0^x t\arcsin(t)dt$	
$u'(t)=t$	$u(t)=\frac{t^2}{2}$
$v(t)=\arcsin(t)$	$v'(t)=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
$F_{14}(x)=\int_0^x t\arcsin(t)dt=\left[\frac{t^2}{2}\arcsin(t)\right]_0^x-$	$\int_0^x\frac{\frac{t^2}{2}}{\sqrt{1-t^2}}dt$

$$F_{14}(x)=\int_0^x t\arcsin(t)dt=\left[\frac{t^2}{2}\arcsin(t)\right]_0^x-\frac{1}{2}\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

Pour le calcul de $\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt$

On pose $t=\sin(u)\Leftrightarrow u=\arcsin(t)\Rightarrow dt=\cos(u)\,du$

$$\sqrt{1-t^2}=\sqrt{1-\sin^2(u)}=\sqrt{\cos^2(u)}=|\cos(u)|$$

Mais $-1\le x\le 1$ donc $-1\le t\le 1$ donc on peut prendre $-\frac{\pi}{2}\le u\le\frac{\pi}{2}$ et alors $\cos(u)\ge 0$.

$$t=0\Rightarrow u=\arcsin(0)=0$$
$$t=x\Rightarrow u=\arcsin(x)$$

$$\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt=\int_0^{\arcsin(x)}\frac{\sin^2(u)}{\cos(u)}\cos(u)\,du=\int_0^{\arcsin(x)}\sin^2(u)\,du$$

Il faut linéariser $\sin^2(u)$ ou ce qui revient au même utiliser la formule

$$\sin^2(u)=\frac{1-\cos(2u)}{2}$$

$$\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int_0^{\arcsin(x)} \frac{1-\cos(2u)}{2}du = \frac{1}{2}\left[u - \frac{1}{2}\sin(2u)\right]_0^{\arcsin(x)}$$
$$= \frac{1}{2}\arcsin(x) - \frac{1}{4}\sin(2\arcsin(2u))$$
$$= \frac{1}{2}\arcsin(x) - \frac{1}{4} \times 2\sin(\arcsin(x))\cos(\arcsin(x)) = \frac{1}{2}\arcsin(x) - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$$

Par conséquent

$$F_{14}(x) = \int_0^x t\arcsin(t)dt = \left[\frac{t^2}{2}\arcsin(t)\right]_0^x - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt$$
$$= \frac{x^2}{2}\arcsin(x) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\arcsin(x) - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\right) = \frac{2x^2-1}{4}\arcsin(x) + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}$$

Allez à : Exercice 6

15. Pour faire une intégration par parties on écrit $F_{15}(x)$ sous la forme

$$F_{15}(x) = \int_0^x 1 \times \arctan(t)\, dt$$

$F_{15}(x) = \int_0^x 1 \times \arctan(t)\, dt$	
$u'(t) = 1$	$u(t) = t$
$v(t) = \arctan(t)$	$v'(t) = \frac{1}{1+t^2}$
$F_{15}(x) = \int_0^x 1 \times \arctan(t)\, dt = [t\arctan(t)]_0^x -$	$\int_0^x \frac{t}{1+t^2}dt$

$$F_{15}(x) = \int_0^x 1 \times \arctan(t)\, dt = [t\arctan(t)]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}dt = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{2t}{1+t^2}dt$$
$$= x\arctan(x) - \frac{1}{2}[\ln(1+t^2)]_0^x = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

Allez à : Exercice 6

Correction exercice 7.

1. Pour F_1 on peut faire deux intégrations par parties

$\int e^x\cos(x)\, dx$	
$u'(x) = e^x$	$u(x) = e^x$
$v(x) = \cos(x)$	$v'(x) = -\sin(x)$
$F_1(x) = [e^x\cos(x)] -$	$\int e^x(-\sin(x))dx$

$$F_1(x) = e^x\cos(x) + \int e^x\sin(x)\, dx$$

$\int e^x\sin(x)\, dx$	
$u'(x) = e^x$	$u(x) = e^x$
$v(x) = \sin(x)$	$v'(x) = \cos(x)$
$\int e^x\sin(x)\, dx = [e^x\sin(x)] -$	$\int e^x\cos(x)\, dx$

$$\int e^x\sin(x)\, dx = e^x\sin(x) - \int e^x\cos(x)\, dx$$

Donc

$$F_1(x) = e^x \cos(x) + \left(e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx\right) \Leftrightarrow F_1(x) = e^x(\cos(x) + \sin(x)) - F_1(x)$$

$$\Leftrightarrow 2F_1(x) = e^x(\cos(x) + \sin(x)) \Leftrightarrow F_1(x) = e^x\left(\frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x)\right)$$

Il ne reste plus qu'à rajouter une constante

$$F_1(x) = e^x\left(\frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x)\right) + K$$

Deuxième méthode

$$F_1(x) = \int e^x \cos(x)\,dx = \int e^x\, \mathcal{R}e\left(e^{ix}\right)dx = \int \mathcal{R}e\left(e^x e^{ix}\right)dx = \int \mathcal{R}e\left(e^{(1+i)x}\right)dx$$

$$= \mathcal{R}e\left(\int e^{(1+i)x}dx\right) = \mathcal{R}e\left(\frac{1}{1+i}e^{(1+i)x}\right) + K$$

$$= \mathcal{R}e\left(\frac{1-i}{2}e^x(\cos(x) + i\sin(x))\right) + K$$

$$= \frac{e^x}{2}\mathcal{R}e(\cos(x) - i\cos(x) + i\sin(x) + \sin(x)) + K = \frac{e^x}{2}(\cos(x) + \sin(x)) + K$$

Allez à : Exercice 7

2. A l'aide d'une intégration par partie

$\int \frac{\ln(x)}{x^n}dx = \int x^{-n}\ln(x)\,dx$	
$u'(x) = x^{-n}$	$u(x) = \frac{1}{-n+1}x^{-n+1} = -\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{x^{n-1}}$
$v(x) = \ln(x)$	$v'(x) = \frac{1}{x}$
$F_2(x) = \left[-\frac{\ln(x)}{(n-1)x^{n-1}}\right] -$	$\int \frac{-1}{n-1} \times \frac{1}{x^n}dx$

$$F_2(x) = -\frac{\ln(x)}{(n-1)x^{n-1}} — 1n - 1 \times \frac{1}{x^n}dx = -\frac{\ln(x)}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int x^{-n}dx$$

$$= -\frac{\ln(x)}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \times \frac{1}{-n+1}x^{-n+1} + K$$

$$= -\frac{\ln(x)}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \times \frac{1}{-n+1}x^{-n+1} + K = -\frac{\ln(x)}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)^2x^{n-1}} + K$$

Allez à : Exercice 7

3. A l'aide d'une intégration par partie

$\int x\arctan(x)\,dx$	
$u'(x) = x$	$u(x) = \frac{x^2}{2}$
$v(x) = \arctan(x)$	$v'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
$F_3(x) = \left[\frac{x^2}{2}\arctan(x)\right] -$	$\frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$

$$F_3(x) = \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}\int\left(\frac{x^2+1}{1+x^2} + \frac{-1}{1+x^2}\right)dx = \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}(x - \arctan(x)) + K = \frac{1}{2}(x^2-1)\arctan(x) - \frac{x}{2} + K$$

Allez à : Exercice 7

4. On cherche une primitive de la forme

$$F_4(x)=(ax^2+bx+c)e^x+K$$
$$F_4'(x)=(2ax+b)e^x+(ax^2+bx+c)e^x=(ax^2+(2a+b)x+b+c)e^x$$
$$(x^2+x+1)e^x=(ax^2+(2a+b)x+b+c)e^x\Leftrightarrow x^2+x+1=ax^2+(2a+b)x+b+c$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\2a+b=1\\b+c=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-1\\c=2\end{cases}$$

Donc

$$F_4(x)=(x^2-x+2)e^x+K$$

On aurait pu faire aussi deux intégrations par partie.

Allez à : Exercice 7

Correction exercice 8.

1.

$$\frac{1}{x(x-1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}$$

On multiplie par x, puis $x=0$

$$a=\left[\frac{1}{x-1}\right]_{x=0}=-1$$

On multiplie par $x-1$, puis $x=1$

$$b=\left[\frac{1}{x}\right]_{x=1}=1$$
$$\frac{1}{x(x-1)}=\frac{-1}{x}+\frac{1}{x-1}$$
$$F_1(x)=\int\frac{dx}{x(x-1)}=\int\left(\frac{-1}{x}+\frac{1}{x-1}\right)dx=-\ln|x|+\ln|x-1|+K=\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+K$$

Allez à : Exercice 8

2.

$$\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{-(x-1)(x+1)}=\frac{-1}{(x-1)(x+1)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}$$

On multiplie par $x-1$, puis $x=1$

$$a=\left[-\frac{1}{x+1}\right]_{x=1}=-\frac{1}{2}$$

On multiplie par $x+1$, puis $x=-1$

$$b=\left[-\frac{1}{x-1}\right]_{x=-1}=\frac{1}{2}$$
$$F_2(x)=\int\frac{dx}{1-x^2}=\int\left(\frac{-\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{\frac{1}{2}}{x+1}\right)dx=\frac{1}{2}(-\ln|x-1|+\ln|x+1|)+K=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+K$$

Remarque :

$$F_2(x)=\operatorname{argth}(x)+K$$

A condition que l'on cherche une intégrale sur l'intervalle $]-1,1[$, sinon c'est faux.

On peut éventuellement décomposer de la façon suivante :

$$\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{(1-x)(x+1)}=\frac{a}{1-x}+\frac{b}{x+1}=\frac{\frac{1}{2}}{1-x}+\frac{\frac{1}{2}}{x+1}$$

Mais alors il faut faire attention

$$\int \frac{dx}{1-x} = -\ln|1-x| + K = -\ln|x-1| + K$$

Allez à : Exercice 8

3.

Première méthode

$$\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$$

On multiplie par x, puis $x = 0$

$$a = \left[\frac{1}{(x-1)(x+1)}\right]_{x=0} = -1$$

On multiplie par $x-1$, puis $x = 1$

$$b = \left[\frac{1}{x(x+1)}\right]_{x=1} = \frac{1}{2}$$

On multiplie par $x+1$, puis $x = -1$

$$c = \left[\frac{1}{x(x-1)}\right]_{x=-1} = \frac{1}{2}$$

$$F_3(x) = \int \frac{dx}{x(x^2-1)} = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1}\right) dx = -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + K$$

$$= \ln\frac{\sqrt{|x^2-1|}}{|x|} + K$$

Deuxième méthode

$$F_3(x) = \int \frac{dx}{x(x^2-1)} = \int \frac{xdx}{x^2(x^2-1)}$$

On pose $t = x^2 \Rightarrow dt = 2xdx$

$$F_3(x) = \int \frac{xdx}{x^2(x^2-1)} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t(t-1)} = \frac{1}{2}F_1(t) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t}\right| + K = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2}\right| + K$$

Allez à : Exercice 8

4. Il faut faire une division euclidienne

$$x^3 = x^3 + 4x - 4x = x(x^2+4) - 4x$$

Donc

$$\frac{x^3}{x^2+4} = x - \frac{4x}{x^2+4}$$

$$F_4(x) = \int \left(x - \frac{4x}{x^2+4}\right) dx = \int \left(x - 2\frac{2x}{x^2+4}\right) dx = \frac{x^2}{2} - 2\ln(x^2+4) + K$$

Remarque :

La valeur absolu dans le logarithme est inutile puisque $x^2 + 4 > 0$.

Allez à : Exercice 8

5.

$$F_5(x) = \int \frac{x}{x^2+4} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+4} dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + K$$

Allez à : Exercice 8

6. Il faudrait faire une division mais

$$\frac{x^2}{x^2+3}=\frac{x^2+3-3}{x^2+3}=1-\frac{3}{x^2+3}$$

$$F_6(x)=\int\frac{x^2}{x^2+3}dx=F_6(x)=\int\left(1-\frac{3}{x^2+3}\right)dx=x-3\int\frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}$$

$$=x-3\times\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)+K=x-\sqrt{3}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)+K$$

Allez à : Exercice 8

7.

$$\frac{1}{x^2(x^2-1)}=\frac{1}{x^2(x-1)(x+1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x-1}+\frac{d}{x+1}$$

On multiplie par x^2, puis $x=0$

$$b=\left[\frac{1}{(x-1)(x+1)}\right]_{x=0}=-1$$

On multiplie par $x-1$, puis $x=1$

$$c=\left[\frac{1}{x^2(x+1)}\right]_{x=1}=\frac{1}{2}$$

On multiplie par $x+1$, puis $x=-1$

$$d=\left[\frac{1}{x^2(x-1)}\right]_{x=-1}=-\frac{1}{2}$$

On multiplie par x, puis $x\to+\infty$

$$0=a+c+d\Leftrightarrow a=0$$

$$\frac{1}{x^2(x^2-1)}=\frac{1}{x^2(x-1)(x+1)}=\frac{-1}{x^2}+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{2}}{x+1}$$

$$F_7(x)=\int\frac{1}{x^2(x^2-1)}dx=\int\left(\frac{-1}{x^2}+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{2}}{x+1}\right)dx=-\int x^{-2}dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}$$

$$=-[-x^{-1}]+\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|+K=\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+K$$

Allez à : Exercice 8

8.

$$\frac{1}{x(x^2-1)^2}=\frac{1}{x(x-1)^2(x+1)^2}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}+\frac{d}{x+1}+\frac{e}{(x+1)^2}$$

Cela risque d'être long, rusons :

$$F_8(x)=\int\frac{1}{x(x^2-1)^2}dx=\int\frac{xdx}{x^2(x^2-1)^2}$$

On pose $t=x^2\Rightarrow dt=2xdx$

$$F_8(x)=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t(t-1)^2}$$

$$\frac{1}{t(t-1)^2}=\frac{a}{t}+\frac{b}{t-1}+\frac{c}{(t-1)^2}$$

C'est déjà beaucoup mieux

On multiplie par t, puis $t=0$

$$a=\left[\frac{1}{(t-1)^2}\right]_{t=0}=1$$

On multiplie par $(t-1)^2$, puis $t=1$

$$c=\left[\frac{1}{t}\right]_{t=1}=1$$

On multiplie par t, puis $t\to+\infty$

$$0=a+b\Leftrightarrow b=-1$$

$$\frac{1}{t(t-1)^2}=\frac{1}{t}-\frac{1}{t-1}+\frac{1}{(t-1)^2}$$

$$F_8(x)=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t-1}+\frac{1}{(t-1)^2}\right)dt=\frac{1}{2}\ln|t|-\frac{1}{2}\ln|t-1|+\frac{1}{2}\int(t-1)^{-2}dt$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t}{t-1}\right|+\frac{1}{2}[(t-1)^{-1}]+K=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2}{x^2-1}\right|+\frac{1}{2}\times\frac{1}{x^2-1}+K$$

Allez à : Exercice 8

9.

$$\frac{1}{(x^2-1)^2}=\frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{c}{x+1}+\frac{d}{(x+1)^2}$$

On multiplie par $(x-1)^2$, puis $x=1$

$$b=\left[\frac{1}{(x+1)^2}\right]_{x=1}=\frac{1}{4}$$

On multiplie par $(x+1)^2$, puis $x=-1$

$$d=\left[\frac{1}{(x+1)^2}\right]_{x=1}=\frac{1}{4}$$

$x=0$

$$1=-a+b+c+d\Leftrightarrow -a+c=\frac{1}{2}$$

On multiplie par x, puis $x\to+\infty$

$$0=a+c$$

On en déduit aisément que :

$$a=-\frac{1}{4}\quad et\quad c=\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2}=\frac{1}{4}\left(\frac{-1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}\right)$$

$$\int\frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2}dx=\frac{1}{4}\int\left(\frac{-1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}\left(-\ln|x-1|+\ln|x+1|+\int((x-1)^{-2}+(x+1)^{-2})dx\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+[-(x-1)^{-1}-(x+1)^{-1}]\right)+K$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)+K=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{4}\frac{2x}{(x^2-1)}+K$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\frac{x}{(x^2-1)}+K$$

Allez à : Exercice 8

10.

$$\frac{1}{x^2(x^2-1)^2}=\frac{1}{x^2(x-1)^2(x+1)^2}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x-1}+\frac{d}{(x-1)^2}+\frac{e}{x+1}+\frac{f}{(x+1)^2}$$

Là cela risque d'être long.

En effet, on peut facilement déterminer b, d et f, ensuite en multipliant par x puis faire tendre $x\to+\infty$, on trouve une autre relation, il en manque encore 2 (car il y a 6 coefficients), mais on ne peut pas faire $x=0$, ni $x=1$, ni $x=-1$, à mon avis $x=i$ donnerait de bon résultats mais on va être un peu astucieux et cela va s'arranger relativement simplement.

$$\frac{1-x^2+x^2}{x^2(x^2-1)^2}=\frac{1-x^2}{x^2(x^2-1)^2}+\frac{x^2}{x^2(x^2-1)^2}=-\frac{1}{x^2(x^2-1)}+\frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2}$$

$$F_{10}(x)=\int\frac{1}{x^2(x^2-1)^2}dx=\int\left(-\frac{1}{x^2(x^2-1)}+\frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2}\right)dx$$

$$=-\int\frac{dx}{x^2(x^2-1)}+\int\frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2}dx=-F_7(x)+F_9(x)$$

Par conséquent

$$F_{10}(x)=-F_7(x)+F_9(x)=-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{4}\frac{2x}{(x^2-1)}+K$$

$$=-\frac{1}{x}-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\frac{x}{(x^2-1)}+K$$

Allez à : Exercice 8

11.

$$F_{11}(x)=\int\frac{x+1}{(x^2+1)^2}dx=\int\frac{x}{(x^2+1)^2}dx+\int\frac{1}{(x^2+1)^2}dx$$

$$\int\frac{x}{(x^2+1)^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{(x^2+1)^2}dx=\frac{1}{2}\times\frac{-1}{x^2+1}$$

$\int\frac{1}{(x^2+1)^2}dx$ est le cas le plus compliqué des fractions rationnelles, il y a deux méthodes

Première méthode

$$\arctan(x)=\int\frac{1}{x^2+1}dx=\int 1\times\frac{1}{x^2+1}dx$$

Et on intègre par parties

$\int 1\times\frac{1}{x^2+1}dx$	
$u'(x)=1$	$u(x)=x$
$v(x)=\frac{1}{x^2+1}$	$v'(x)=-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$
$\int\frac{1}{x^2+1}dx=\left[\frac{x}{x^2+1}\right]-$	$\int x\frac{(-2x)}{x^2+1}dx$

$$\arctan(x)=\int\frac{1}{x^2+1}dx=\left[\frac{x}{x^2+1}\right]+2\int\frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx=\frac{x}{x^2+1}+2\int\frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^2}dx$$

$$=\frac{x}{x^2+1}+2\int\frac{x^2+1}{(x^2+1)^2}dx-2\int\frac{1}{(x^2+1)^2}dx$$

$$=\frac{x}{x^2+1}+2\int\frac{1}{x^2+1}dx-2\int\frac{1}{(x^2+1)^2}dx$$

$$=\frac{x}{x^2+1}+2\arctan(x)-2\int\frac{1}{(x^2+1)^2}dx$$

Donc

$$2\int\frac{1}{(x^2+1)^2}dx=\frac{x}{x^2+1}+\arctan(x)\Rightarrow\int\frac{1}{(x^2+1)^2}dx=\frac{1}{2}\times\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\arctan(x)+K$$

Deuxième méthode

On fait le changement de variable $x=\tan(t) \Leftrightarrow dx=(1+\tan^2(t))dt$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx=\int \frac{1+\tan^2(t)}{(1+\tan^2(t))^2}dt=\int \frac{dt}{1+\tan^2(t)}=\int \cos^2(t)\,dt=\int \frac{1+\cos(2t)}{2}dt$$

$$=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin(2t)\right)+K=\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\times 2\sin(t)\cos(t)=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\frac{\sin(t)}{\cos(t)}\cos^2(t)$$

$$=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\times\frac{\sin(t)}{\cos(t)}\times\frac{1}{1+\tan^2(t)}=\frac{1}{2}\arctan(x)+\frac{1}{2}x\frac{1}{1+x^2}$$

$$F_{11}(x)=\frac{1}{2}\times\frac{-1}{x^2+1}+\frac{1}{2}\arctan(x)+\frac{1}{2}\times\frac{x}{1+x^2}+K=\frac{1}{2}\times\frac{x-1}{x^2+1}+\frac{1}{2}\arctan(x)+K$$

Allez à : Exercice 8

12. A priori il faut décomposer $\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}$ en éléments simples mais $(x-2)(x+5)=x^2+3x-10$

Donc $\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}$ est de la forme $\frac{u'(x)}{u(x)}$ et alors

$$F_{12}(x)=\ln|x^2+3x-10|+K$$

Allez à : Exercice 8

13.

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)(x+3)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x+3}$$

On multiplie par $x-1$, puis $x=1$

$$a=\left[\frac{x}{(x+1)(x+3)}\right]_{x=1}=\frac{1}{8}$$

On multiplie par $x+1$, puis $x=-1$

$$b=\left[\frac{x}{(x-1)(x+3)}\right]_{x=-1}=\frac{1}{4}$$

On multiplie par $x+3$, puis $x=-3$

$$c=\left[\frac{x}{(x-1)(x+1)}\right]_{x=-3}=-\frac{3}{8}$$

$$F_{13}(x)=\int\left(\frac{\frac{1}{8}}{x-1}+\frac{\frac{1}{4}}{x+1}+\frac{-\frac{3}{8}}{x+3}\right)dx=\frac{1}{8}\ln|x-1|+\frac{1}{4}\ln|x+1|-\frac{3}{8}\ln|x+3|+K$$

Allez à : Exercice 8

14.

$$x^4-x^2-2=X^2-X-2$$

Ce polynôme a deux racines $X_1=-1$ et $X_2=2$ donc

$$x^4-x^2-2=X^2-X-2=(X+1)(X-2)=(x^2+1)(x^2-2)=(x^2+1)\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)$$

$$\frac{1}{x^4-x^2-2}=\frac{1}{(x^2+1)\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)}=\frac{ax+b}{x^2+1}+\frac{c}{x-\sqrt{2}}+\frac{d}{x+\sqrt{2}}$$

On multiplie par x^2+1, puis $x=i$

$$ai+b=\left[\frac{1}{\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)}\right]_{x=i}=\left[\frac{1}{x^2-2}\right]_{x=i}=-\frac{1}{3}$$

Donc $a=0$ et $b=-\frac{1}{3}$

On multiplie par $x-\sqrt{2}$, puis $x=\sqrt{2}$

$$c=\left[\frac{1}{(x^2+1)\left(x+\sqrt{2}\right)}\right]_{x=\sqrt{2}}=\frac{1}{3\times 2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{12}$$

On multiplie par $x+\sqrt{2}$, puis $x=-\sqrt{2}$

$$d=\left[\frac{1}{(x^2+1)\left(x-\sqrt{2}\right)}\right]_{x=-\sqrt{2}}=\frac{-1}{3\times 2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{12}$$

$$F_{14}(x)=\int\left(\frac{-\frac{1}{3}}{x^2+1}+\frac{\frac{\sqrt{2}}{12}}{x-\sqrt{2}}+\frac{-\frac{\sqrt{2}}{12}}{x+\sqrt{2}}\right)dx$$

$$=-\frac{1}{3}\arctan(x)+\frac{\sqrt{2}}{12}\ln\left|x-\frac{\sqrt{2}}{12}\right|-\frac{\sqrt{2}}{12}\ln\left|x+\frac{\sqrt{2}}{12}\right|+K$$

$$=-\frac{1}{3}\arctan(x)+\frac{\sqrt{2}}{12}\ln\left|\frac{x-\frac{\sqrt{2}}{12}}{x+\frac{\sqrt{2}}{12}}\right|+K$$

Allez à : Exercice 8

15. x^2+2x+5 n'a pas de racine réelle.

$$\frac{1}{(x+2)(x^2+2x+5)}=\frac{a}{x+2}+\frac{bx+c}{x^2+2x+5}$$

On multiplie par $x=2$, puis $x=-2$

$$a=\left[\frac{1}{x^2+2x+5}\right]_{x=-2}=\frac{1}{5}$$

On multiplie par x, puis $x\to+\infty$

$$0=a+b\Leftrightarrow b=-\frac{1}{5}$$

$x=0$

$$\frac{1}{10}=\frac{a}{2}+\frac{c}{5}\Leftrightarrow 1=5a+2c\Leftrightarrow c=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}a=0$$

$$F_{15}(x)=\int\left(\frac{\frac{1}{5}}{x+2}+\frac{-\frac{1}{5}x}{x^2+2x+5}\right)dx=\frac{1}{5}\ln|x+2|-\frac{1}{5}\int\frac{x}{x^2+2x+5}dx$$

$$\int\frac{x}{x^2+2x+5}dx=\int\frac{x}{(x+2)^2+1}dx$$

On pose $t=x+2\Leftrightarrow x=t-2\Rightarrow dx=dt$

$$\int\frac{x}{x^2+2x+5}dx=\int\frac{t-2}{t^2+1}dt=\int\frac{t}{t^2+1}dt-2\int\frac{1}{t^2+1}dt=\frac{1}{2}\ln(t^2+1)-2\arctan(t)+K$$

$$=\frac{1}{2}\ln((x+2)^2+1)-2\arctan(x+2)+K$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5)-2\arctan(x+2)+K$$

$$F_{15}(x)=\frac{1}{5}\ln|x+2|-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5)-2\arctan(x+2)\right)+K$$

$$=\frac{1}{5}\ln|x+2|-\frac{1}{10}\ln(x^2+2x+5)+\frac{2}{5}\arctan(x+2)+K$$

Allez à : Exercice 8

16. C'est très difficile.

$$\frac{16}{x^2(x^2+2)^3}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{cx+d}{x^2+2}+\frac{ex+f}{(x^2+2)^2}+\frac{hx+j}{(x^2+2)^3}$$

$\frac{16}{x^2(x^2+2)^3}$ est paire donc

$$\frac{16}{x^2(x^2+2)^3}=\frac{a}{-x}+\frac{b}{(-x)^2}+\frac{-cx+d}{(-x)^2+2}+\frac{-ex+f}{((-x)^2+2)^2}+\frac{-hx+j}{((-x)^2+2)^3}$$

On en déduit que :

$$a=c=e=h=0$$

$$\frac{16}{x^2(x^2+2)^3}=\frac{b}{x^2}+\frac{d}{x^2+2}+\frac{f}{(x^2+2)^2}+\frac{j}{(x^2+2)^3}$$

On multiplie par x^2 puis $x=0$

$$b=\left[\frac{16}{(x^2+2)^3}\right]_{x=0}=2$$

On multiplie par $(x^2+2)^3$ puis $x=i\sqrt{2}$

$$j=\left[\frac{16}{x^2}\right]_{x=i\sqrt{2}}=-8$$

On multiplie par x^2, puis $x^2\to+\infty$

$$0=b+d\Leftrightarrow d=-2$$

$x=i$

$$-16=-b+d+f+j\Leftrightarrow -16=-2-2+f-8\Leftrightarrow f=-4$$

$$\frac{16}{x^2(x^2+2)^3}=\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^2+2}-\frac{4}{(x^2+2)^2}-\frac{8}{(x^2+2)^3}$$

$$F_{16}(x)=\int\frac{16dx}{x^2(x^2+2)^3}=\int\left(\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^2+2}-\frac{4}{(x^2+2)^2}-\frac{8}{(x^2+2)^3}\right)dx$$

$$=-\frac{2}{x}-\frac{2}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)-4\int\frac{dx}{4\left(\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right)^2}-8\int\frac{dx}{8\left(\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right)^3}$$

$$=-\frac{2}{x}-\frac{2}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)-\int\frac{dx}{\left(\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right)^2}-\int\frac{dx}{\left(\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right)^3}$$

Dans les deux intégrales on fait le changement de variable $t=\frac{x}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow x=\sqrt{2}t\Rightarrow dx=\sqrt{2}dt$

$$F_{16}(x)=-\frac{2}{x}-\sqrt{2}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)-\sqrt{2}\int\frac{dt}{(t^2+1)^2}-\sqrt{2}\int\frac{dt}{(t^2+1)^3}$$

Or

$$\int\frac{1}{(x^2+1)^2}dx=\frac{1}{2}\times\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\arctan(x)$$

D'après le cours, ce que l'on a revu dans le calcul de $F_{11}(x)$.

Donc

$$\int\frac{dt}{(t^2+1)^2}=\frac{1}{2}\times\frac{t}{t^2+1}+\frac{1}{2}\arctan(t)$$

$$\int\frac{dt}{(t^2+1)^2}=\int 1\times\frac{1}{(t^2+1)^2}dt$$

On intègre par parties

$\int 1 \times \frac{1}{(t^2+1)^2} dt$	
$u'(t) = 1$	$u(t) = t$
$v(t) = \frac{1}{(t^2+1)^2} = (t^2+1)^{-2}$	$v'(t) = -\frac{4t}{(t^2+1)^3}$
$\int \frac{1}{(t^2+1)^2} dt = \left[\frac{t}{(t^2+1)^2}\right] -$	$\int t \times \left(-\frac{4t}{(t^2+1)^3}\right) dt$

$$\int \frac{1}{(t^2+1)^2} dt = \left[\frac{t}{(t^2+1)^2}\right] + 4\int \frac{t^2}{(t^2+1)^3} dt = \frac{t}{(t^2+1)^2} + 4\int \frac{t^2+1-1}{(t^2+1)^3} dt$$
$$= \frac{t}{(t^2+1)^2} + 4\int \frac{t^2+1}{(t^2+1)^3} dt - 4\int \frac{1}{(t^2+1)^3} dt$$
$$= \frac{t}{(t^2+1)^2} + 4\int \frac{1}{(t^2+1)^2} dt - 4\int \frac{1}{(t^2+1)^3} dt$$

Donc

$$4\int \frac{1}{(t^2+1)^3} dt = \frac{t}{(t^2+1)^2} + 3\int \frac{1}{(t^2+1)^2} dt$$
$$\int \frac{1}{(t^2+1)^3} dt = \frac{1}{4} \times \frac{t}{(t^2+1)^2} + 3\left(\frac{1}{2} \times \frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{2}\arctan(t)\right)$$

On en déduit que

$$F_{16}(x) = -\frac{2}{x} - \frac{2}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2} \times \frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{2}\arctan(t)\right)$$
$$- 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{4} \times \frac{t}{(t^2+1)^2} + 3\left(\frac{1}{2} \times \frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{2}\arctan(t)\right)\right) + K$$
$$= -\frac{2}{x} - \frac{2}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{2}\frac{t}{t^2+1} - \sqrt{2}\arctan(t) - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{t}{(t^2+1)^2}$$
$$- 3\sqrt{2}\arctan(t) + K$$
$$= -\frac{2}{x} - \sqrt{2}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{x}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} - \sqrt{2}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2} \times \frac{x}{\left(\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1\right)^2}$$
$$- 3\sqrt{2}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + K = -\frac{2}{x} - 5\sqrt{2}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{2x}{x^2+2} - \frac{2x}{(x^2+2)^2} + K$$

Allez à : Exercice 8

17. Attention il faut faire une division euclidienne.

$$x(x-1)^3 = x(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$$

$x^4 \qquad\qquad + 1$	$x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$
$x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$	1
$3x^3 - 3x^2 + x + 1$	

$$x^4 + 1 = 1 \times (x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x) + 3x^3 - 3x^2 + x + 1$$

Donc

$$\frac{x^4+1}{x(x-1)^3} = 1 + \frac{3x^3 - 3x^2 + x + 1}{x(x-1)^3}$$
$$F_{17}(x) = \int \left(1 + \frac{3x^3 - 3x^2 + x + 1}{x(x-1)^3}\right) dx = x + \int \frac{3x^3 - 3x^2 + x + 1}{x(x-1)^3} dx$$
$$\frac{3x^3 - 3x^2 + x + 1}{x(x-1)^3} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} + \frac{d}{(x-1)^3}$$

On multiplie par x, puis $x = 0$

$$a=\left[\frac{3x^3-3x^2+x+1}{(x-1)^3}\right]_{x=0}=-1$$

On multiplie par $(x-1)^3$, puis $x=1$

$$d=\left[\frac{1}{x}\right]_{x=1}=1$$

On multiplie par x puis $x\to+\infty$

$$3=a+b\Leftrightarrow b=-4$$

$x=2$

$$\frac{3\times 8-3\times 4+2+1}{2\times 1}=\frac{a}{2}+b+c+d\Leftrightarrow\frac{15}{2}=-\frac{1}{2}-4+c+1\Leftrightarrow c=8+4-1=11$$

$$\frac{3x^3-3x^2+x+1}{x(x-1)^3}=\frac{-1}{x}-\frac{4}{x-1}+\frac{11}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-1)^3}$$

$$\int\frac{3x^3-3x^2+x+1}{x(x-1)^3}dx=\int\left(\frac{-1}{x}-\frac{4}{x-1}+\frac{11}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-1)^3}\right)dx$$

$$=-\ln|x|-4\ln|x-1|-\frac{11}{x-1}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{(x-1)^2}+K$$

$$F_{17}(x)=x-\ln|x|-4\ln|x-1|-\frac{11}{x-1}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{(x-1)^2}+K$$

Allez à : Exercice 8

18. Si on n'a rien vu il faut décomposer la fraction

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2}=\frac{a}{x}+\frac{bx+c}{x^2+1}+\frac{dx+e}{(x^2+1)^2}$$

On multiplie par $(x^2+1)^2$ puis $x=i$

$$di+e=\left[\frac{1}{x}\right]_{x=i}=\frac{1}{i}=-i\Rightarrow\begin{cases}d=-1\\e=0\end{cases}$$

On multiplie par x puis $x=0$

$$a=\left[\frac{1}{(x^2+1)^2}\right]_{x=0}=1$$

$x\to\frac{1}{x(x^2+1)^2}$ est impaire donc

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2}=-\frac{1}{(-x)((-x)^2+1)^2}\Leftrightarrow\frac{a}{x}+\frac{bx+c}{x^2+1}+\frac{dx+e}{(x^2+1)^2}$$

$$=-\left(\frac{a}{-x}+\frac{-bx+c}{(-x)^2+1}+\frac{-dx+e}{((-x)^2+1)^2}\right)\Leftrightarrow\frac{a}{x}+\frac{bx+c}{x^2+1}+\frac{dx+e}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{a}{x}+\frac{bx-c}{x^2+1}+\frac{dx-e}{(x^2+1)^2}\Rightarrow c=e=0$$

Et enfin on multiplie par x, puis $x\to+\infty$

$$0=a+b\Rightarrow b=-1$$

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2}=\frac{1}{x}+\frac{-x}{x^2+1}+\frac{-x}{(x^2+1)^2}$$

$$F_{18}(x)=\int\frac{1}{x(x^2+1)^2}dx=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{-x}{x^2+1}+\frac{-x}{(x^2+1)^2}\right)dx$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\times\frac{1}{x^2+1}+K$$

Mais on peut faire mieux

$$F_{18}(x)=\int\frac{1}{x(x^2+1)^2}dx=\int\frac{xdx}{x^2(x^2+1)^2}$$

On peut alors faire le changement de variable $t=x^2$ donc $dt=2xdx$

$$F_{18}(x)=\int\frac{xdx}{x^2(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t(t+1)^2}$$

Puis on décompose la fraction en éléments simple

$$\frac{1}{t(t+1)^2}=\frac{a}{t}+\frac{b}{t+1}+\frac{c}{(t+1)^2}$$

On multiplie par t, puis $t=0$

$$a=\left[\frac{1}{(t+1)^2}\right]_{t=0}=1$$

On multiplie par $(t+1)^2$ puis $t=-1$

$$c=\left[\frac{1}{t}\right]_{t=-1}=-1$$

On multiplie par t, puis $t\to+\infty$

$$0=a+b\Rightarrow b=-1$$

$$F_{18}(x)=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t}+\frac{-1}{t+1}+\frac{-1}{(t+1)^2}\right)dt=\frac{1}{2}\left(\ln|t|-\ln|t+1|+\frac{1}{t+1}\right)+K$$
$$=\frac{1}{2}\left(\ln(x^2)-\ln(x^2+1)+\frac{1}{x^2+1}\right)+K=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}\times\frac{1}{x^2+1}+K$$

Allez à : Exercice 8

19.

Le polynôme t^2+2t+4 n'admet pas de racines réelles, cette fraction est donc un élément simple, il faut donc mettre le dénominateur sous sa forme canonique

$$t^2+2t+4=(t+1)^2+3$$
$$\int\frac{t}{t^2+2t+4}dt=\int\frac{t}{(t+1)^2+3}dt$$

Puis faire le changement de variable $x=t+1\Leftrightarrow t=x-1$, ce qui entraine que $dt=dx$

$$\int\frac{t}{t^2+2t+4}dt=\int\frac{x-1}{x^2+3}dx=\int\frac{x}{x^2+3}dx-\int\frac{1}{x^2+3}dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+3)-\int\frac{1}{x^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}dx$$
$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+3)-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)+K=\frac{1}{2}\ln(t^2+2t+4)-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t+1}{\sqrt{3}}\right)+K$$

Allez à : Exercice 8

Correction exercice 9.

1.

$$\int\frac{-t+1}{t^2+2t+5}dt=\int\frac{-t+1}{(t+1)^2+4}dt$$

On fait le changement de variable $u=t+1\Leftrightarrow t=u-1$, $dt=du$

$$G(t)=\int\frac{-(u-1)+1}{u^2+4}dt=\int\frac{-u+2}{u^2+4}dt=\int\frac{-u}{u^2+4}dt+\int\frac{2}{u^2+4}dt$$
$$=-\frac{1}{2}\ln(u^2+4)+\frac{2}{2}\arctan\left(\frac{u}{2}\right)=-\frac{1}{2}\ln(t^2+2t+5)+\arctan\left(\frac{t+1}{2}\right)+K$$

Allez à : Exercice 9

2. On fait une intégration par partie

$F(t)=\int\frac{\ln(t^2+2t+5)}{t^2}dt$	
$u'(t)=\frac{1}{(t-1)^2}$	$u(t)=-\frac{1}{t-1}$
$v(t)=\ln(t^2+2t+5)$	$v'(t)=\frac{2t+2}{t^2+2t+5}$
$F(t)=\left[-\frac{\ln(t^2+2t+5)}{t-1}\right]+$	$\int\frac{2t+2}{(t-1)(t^2+2t+5)}dt$

Il existe a, b et c réels tels que

$$\frac{2t+2}{(t-1)(t^2+2t+5)}=\frac{a}{t-1}+\frac{bt+c}{t^2+2t+5}$$

Je multiplie par $t-1$, puis $t=1$

$$a=\left[\frac{2t+2}{t^2+2t+5}\right]_{t=1}=\frac{1}{2}$$

Je multiplie par t, puis $t\to+\infty$

$$0=a+b\Leftrightarrow b=-\frac{1}{2}$$

$t=0$,

$$-\frac{2}{5}=-a+\frac{c}{5}\Leftrightarrow c=-2+5a=\frac{1}{2}$$

$$\int\frac{2t+2}{(t-1)(t^2+2t+5)}dt=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-1}+\frac{-t+1}{t^2+2t+5}\right)dt=\frac{1}{2}\left(\ln|t-1|+\int\frac{-t+1}{t^2+2t+5}dt\right)$$
$$=\frac{1}{2}\ln|t-1|-\frac{1}{4}\ln(t^2+2t+5)+\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{t+1}{2}\right)+K$$

Donc

$$F(t)=-\frac{\ln(t^2+2t+5)}{t-1}+\frac{1}{2}\ln|t-1|-\frac{1}{4}\ln(t^2+2t+5)+\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{t+1}{2}\right)+K$$

Allez à : Exercice 9

Correction exercice 10.

1. Il existe a, b et c réels tels que :

$$f(x)=\frac{2x+1}{x^2(x+1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x+1}$$

On multiplie par x^2, puis $x=0$

$$b=\left[\frac{2x+1}{x+1}\right]_{x=0}=1$$

On multiplie par $x+1$, puis $x=-1$

$$c=\left[\frac{2x+1}{x^2}\right]_{x=-1}=-1$$

On multiplie par x, puis $x\to+\infty$

$$0=a+c\Rightarrow a=1$$

Par conséquent

$$f(x)=\frac{2x+1}{x^2(x+1)}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x+1}$$

2.

$F(x)=\int\frac{1}{x^2}\ln(x^2+x)\,dx$	
$u'(x)=\frac{1}{x^2}$	$u(x)=-\frac{1}{x}$
$v(x)=\ln(x^2+x)$	$v'(x)=\frac{2x+1}{x^2+x}$
$F(x)=-\frac{1}{x}\ln(x^2+x)$	$-\int\frac{2x+1}{-x(x^2+x)}dx$

Donc

$$F(x)=-\frac{1}{x}\ln(x^2+x)+\int\frac{2x+1}{x^2(x+1)}dx=-\frac{1}{x}\ln(x^2+x)+\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=-\frac{1}{x}\ln(x^2+x)+\ln|x|-\frac{1}{x}-\ln|x+1|+K,\quad K\in\mathbb{R}$$

Allez à : Exercice 10

Correction exercice 11.

1.

$$F_1(x)=\int\frac{dx}{x^2+5}=\int\frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)+K$$

Allez à : Exercice 11

2.

$$F_2(x)=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2-1}}$$

On fait le changement de variable $t=\frac{x}{\sqrt{5}}\Leftrightarrow x=\sqrt{5}t\Rightarrow dx=\sqrt{5}dt$

$$F_2(x)=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{\sqrt{5}dt}{\sqrt{t^2-1}}=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}=\operatorname{argch}(t)+K=\operatorname{argch}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)+K$$

Allez à : Exercice 11

3.

On fait le changement de variable $t=e^x\Leftrightarrow x=\ln(t)\Rightarrow dx=\frac{dt}{t}$

$$F_3(x)=\int t\sin(t)\left(\frac{dt}{t}\right)=\int\sin(t)\,dt=-\cos(t)+K=-\cos(e^x)+K$$

Autre méthode : on remarque que $dt=e^x dx$, or ce terme est dans l'intégrale donc

$$F_3(x)=\int e^x\sin(e^x)dx=\int\sin(e^x)(e^x dx)=\int\sin(t)\,dt=-\cos(t)+K=-\cos(e^x)+K$$

Allez à : Exercice 11

4. On pose $t=\tan(x)\Leftrightarrow x=\arctan(t)\Rightarrow dx=\frac{dt}{1+t^2}$

$$F_4(x)=\int t^3\times\frac{dt}{1+t^2}=\int\frac{t^3}{1+t^2}dt=\int\frac{t(t^2+1)-t}{1+t^2}dt=\int\left(t-\frac{t}{1+t^2}\right)dt$$
$$=\frac{t^2}{2}-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)+K=\frac{1}{2}\tan^2(x)-\frac{1}{2}\ln(1+\tan^2(x))+K$$

Autre méthode

$$F_4(x)=\int\tan^3(x)\,dx=\int\tan(x)(\tan^2(x)+1-1)dx$$
$$=\int\tan(x)\,(1+\tan^2(x))dx-\int\tan(x)\,dx+K'$$
$$=\int\tan(x)\tan'(x)\,dx-\int\frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx+K'=\frac{1}{2}\tan^2(x)+\int\frac{\cos'(x)}{\cos(x)}dx+K'$$
$$=\frac{1}{2}\tan^2(x)+\ln|\cos(x)|+K'$$

On peut se demander si ces deux primitives sont bien égales à une constante près.

$$\ln(1+\tan^2(x))=\ln\left(\frac{1}{\cos^2(x)}\right)=-\ln(\cos^2(x))=-2\ln|\cos(x)|$$

Donc tout va bien.

Allez à : Exercice 11

5.
$$F_5(x)=\int \frac{1}{\tan^3(x)}\,dx=\int \frac{1+\tan^2(x)-\tan^2(x)}{\tan^3(x)}\,dx=\int \frac{1+\tan^2(x)}{\tan^3(x)}\,dx-\int \frac{\tan^2(x)}{\tan^3(x)}\,dx$$
$$=\int \frac{\tan'(x)}{\tan^3(x)}dx-\int \frac{1}{\tan(x)}dx=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{\tan^2(x)}-\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}dx$$
$$=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{\tan^2(x)}-\int \frac{\sin'(x)}{\sin(x)}dx=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{\tan^2(x)}-\ln|\sin(x)|+K$$

Autre méthode
$$F_5(x)=\int \frac{1}{\tan^3(x)}\,dx=\int \frac{\cos^3(x)}{\sin^3(x)}dx=\int \frac{\cos(x)\cos^2(x)}{\sin^3(x)}dx=\int \frac{\cos(x)\,(1-\sin^2(x))}{\sin^3(x)}dx$$
$$=\int \frac{1-\sin^2(x)}{\sin^3(x)}\cos(x)\,dx$$

On fait alors le changement de variable $t=\sin(x)\Rightarrow dt=\cos(x)\,dx$
$$F_5(x)=\int \frac{1-\sin^2(x)}{\sin^3(x)}\cos(x)\,dx=\int \frac{1-t^2}{t^3}(dt)=\int\left(\frac{1}{t^3}-\frac{1}{t}\right)dt=\int t^{-3}dt-\ln|t|+K'$$
$$=-\frac{1}{2}\times t^{-2}-\ln|t|+K'=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{t^2}-\ln|t|+K'=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sin^2(x)}-\ln|\sin(x)|+K'$$

Là encore on peut se demander si ces deux primitives sont égales à une constante près.
$$\frac{1}{\sin^2(x)}=\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\sin^2(x)}=\frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)}+1=\frac{1}{\tan^2(x)}+1$$

Donc
$$F_5(x)=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sin^2(x)}-\ln|\sin(x)|+K'=-\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{\tan^2(x)}+1\right)-\ln|\sin(x)|+K'$$
$$=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{\tan^2(x)}-\ln|\sin(x)|-\frac{1}{2}+K'$$

On en déduit que $K=-\frac{1}{2}+K'$.

Allez à : Exercice 11

6. A priori il faudrait décomposer la fraction en éléments simples mais ici cela s'arrange plus simplement.
On pose $t=x^2+3x+7\Rightarrow dt=(2x+3)dx$
$$F_6(x)=\int \frac{dt}{t^m}=\int t^{-m}dt=\frac{1}{1-m}t^{-m+1}+K=-\frac{1}{m-1}\times\frac{1}{t^{m-1}}+K$$
$$=-\frac{1}{m-1}\times\frac{1}{(x^2+3x+7)^{m-1}}+K$$

Allez à : Exercice 11

7.
$$F_7(x)=\int \frac{\ln(x)}{x}dx=\int \ln(x)\times\frac{dx}{x}=\int \ln(x)\times\ln'(x)\,dx=\frac{1}{2}\ln^2(x)+K$$

Autre méthode (très semblable)

On pose $t=\ln(x)\Rightarrow dt=\frac{dx}{x}$
$$F_7(x)=\int \frac{\ln(x)}{x}dx=\int \ln(x)\times\frac{dx}{x}=\int tdt=\frac{1}{2}\times t^2+K=\frac{1}{2}\ln^2(x)+K$$

Encore une autre méthode

On pose $t=\ln(x)\Leftrightarrow x=e^t\Rightarrow dx=e^t dt$
$$F_7(x)=\int \frac{\ln(x)}{x}dx=\int \frac{\ln(e^t)}{e^t}\times e^t dt=\int tdt=\frac{1}{2}\times t^2+K=\frac{1}{2}\ln^2(x)+K$$

Allez à : Exercice 11

8. La « méthode normale » voudrait que l'on pose $t = e^x$ mais ici cela s'arrange plus simplement.
On pose $t = \mathrm{sh}(x) \Rightarrow dt = \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{d}x$

$$F_8(x) = \int \frac{1}{t^5} dt = \int t^{-5} dt = \frac{1}{-4} \times t^{-4} + K = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{t^4} + K = -\frac{1}{4\,\mathrm{sh}^4(x)} + K$$

Allez à : Exercice 11

Correction exercice 12.

1. Ce n'est qu'un rappel d'un résultat du cours :

$$F_1(x) = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + K$$

Allez à : Exercice 12

2. Pour F_2, on constate que $\frac{1}{(1+x^2)^2}$ est un élément simple, donc il n'y a pas de décomposition à faire.

Première méthode (décrite dans le cours)

$\arctan(x) = \int 1 \times \frac{1}{1+x^2} dx$	
$u'(x) = 1$	$u(x) = x$
$v(x) = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1}$	$v'(x) = -2x(1+x^2)^{-2}$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \left[\frac{x}{1+x^2}\right] -$	$\int x\left(-\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right) dx$

$$\begin{aligned}\arctan(x) &= \frac{x}{1+x^2} + 2\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx = \frac{x}{1+x^2} + 2\int \frac{x^2+1-1}{(1+x^2)^2} dx \\ &= \frac{x}{1+x^2} + 2\int \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{(1+x^2)^2}\right) dx \\ &= \frac{x}{1+x^2} + 2\left(\int \frac{1}{1+x^2} dx - \int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx\right) \\ &= \frac{x}{1+x^2} + 2\left(\arctan(x) - \int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx\right) = \frac{x}{1+x^2} + 2\arctan(x) - 2F_2(x)\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$F_2(x) = \frac{1}{2}\arctan(x) + \frac{1}{2} \times \frac{x}{1+x^2} + K$$

Deuxième méthode

On pose $x = \tan(t)$, alors $dx = (1+\tan^2(t))dt$

$$\begin{aligned}F_2(x) &= \int \frac{(1+\tan^2(t))}{(1+\tan^2(t))^2} dt = \int \frac{1}{1+\tan^2(t)} dt = \int \cos^2(t)\,dt = \int \frac{1+\cos(2t)}{2} dt \\ &= \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin(2t) + K = \frac{\arctan(x)}{2} + \frac{1}{4}\sin(2\arctan(x)) + K' \\ &= \frac{\arctan(x)}{2} + \frac{2}{4}\sin(\arctan(x))\cos(\arctan(x)) + K' \\ &= \frac{\arctan(x)}{2} + \frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + K' = \frac{\arctan(x)}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{x}{1+x^2} + K'\end{aligned}$$

En effet :

$$\cos^2(\arctan(x)) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}$$

Ensuite $\arctan(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos(\arctan(x)) > 0$ donc

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Puis

$$\sin(\arctan(x)) = \tan(\arctan(x))\cos(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Si on trouve que

$$F_2(x) = \frac{\arctan(x)}{2} + \frac{1}{4}\sin(2\arctan(x)) + K'$$

C'est bon.

Allez à : Exercice 12

3. Il faut faire une division euclidienne : $x^3 = x^3 - 4x + 4x = x(x^2-4) + 4x$
Donc

$$\frac{x^3}{x^2-4} = x + \frac{4x}{x^2-4}$$

Normalement il faudrait encore décomposer $\frac{4x}{x^2-4}$ mais cette fraction est, à une constante multiplicative près, de la forme $\frac{u'(x)}{u(x)}$.

$$F_3(x) = \int \left(x + \frac{4x}{x^2-4}\right)dx = \frac{x^2}{2} + 2\ln|x^2-4| + K$$

Allez à : Exercice 12

4.

$$\frac{4x}{(x-2)^2} = \frac{a}{(x-2)^2} + \frac{b}{x-2}$$

$$a = [4x]_{x=2} = 8$$

On multiplie par x, puis $x \to +\infty$

$$4 = b$$

$$F_4(x) = \int \left(\frac{8}{(x-2)^2} + \frac{4}{x-2}\right)dx = 8\int (x-2)^{-2}dx + 4\int \frac{1}{x-2}dx$$

$$= 8(-1)(x-2)^{-1} + 4\ln|x-2| + K = -\frac{8}{x-2} + 4\ln|x-2| + K$$

Allez à : Exercice 12

5.

x^2+x+1 n'a pas de racines réelles donc $\frac{1}{x^2+x+1}$ est un élément simple et il faut mettre x^2+x+1 sous forme canonique.

$$F_5(x) = \int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

On fait le changement de variable $t = x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = t - \frac{1}{2} \Rightarrow dx = dt$

$$F_5(x) = \int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}} = \int \frac{dt}{t^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right) + K = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + K$$

Allez à : Exercice 12

6. t^2+2t-1 admet deux racines réelles distinctes

$$t_1 = \frac{-2-\sqrt{8}}{2} = -1-\sqrt{2}$$

Et

$$t_2 = -1+\sqrt{2}$$

$$t^2+2t-1 = (t-t_1)(t-t_2)$$

$$\frac{1}{t^2+2t-1}=\frac{1}{(t-t_1)(t-t_2)}=\frac{a}{t-t_1}+\frac{b}{t-t_2}$$

$$a=\left[\frac{1}{t-t_2}\right]_{t=t_1}=\frac{1}{t_1-t_2}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$b=\left[\frac{1}{t-t_1}\right]_{t=t_2}=\frac{1}{t_2-t_1}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$F_6(t)=\frac{\sqrt{2}}{4}\int\left(\frac{-1}{t-t_1}+\frac{1}{t-t_2}\right)dt=\frac{\sqrt{2}}{4}(-\ln|t-t_1|+\ln|t-t_2|)+K=\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{t-t_2}{t-t_1}\right|+K$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}}\right|+K$$

Allez à : Exercice 12

7. $t^2-2t+10$ n'a pas de racine réelle donc $\frac{3t+1}{(t^2-2t+10)^2}$ est un élément simple et il faut mettre $t^2-2t+10$ sous sa forme canonique.

$$F_7(t)=\int\frac{(3t+1)dt}{((t-1)^2+9)^2}$$

On fait le changement de variable $u=t-1\Leftrightarrow t=u+1\Rightarrow dt=du$

$$F_7(t)=\int\frac{(3(u+1)+1)du}{(u^2+9)^2}=\int\frac{(3u+4)du}{(u^2+9)^2}=\int\frac{3udu}{(u^2+9)^2}+\int\frac{4du}{(u^2+9)^2}$$

$$I_1(t)=\int\frac{3udu}{(u^2+9)^2}\quad et\quad I_2(t)=\int\frac{4du}{(u^2+9)^2}$$

Dans I_1 on fait le changement de variable $v=u^2\Rightarrow dv=2udu$

$$I_1(t)=\int\frac{\frac{3}{2}dv}{(v+9)^2}=\frac{3}{2}\int(v+9)^{-2}dv=\frac{3}{2}(-1)(v+9)^{-1}=-\frac{3}{2(v+9)}=-\frac{3}{2(u^2+9)}$$

$$=-\frac{3}{2((t-1)^2+9)}=-\frac{3}{2(t^2-2t+10)}$$

$$I_2(t)=\int\frac{4du}{(u^2+9)^2}=\int\frac{4du}{9^2\left(\left(\frac{u}{3}\right)^2+1\right)^2}$$

On fait le changement de variable $v=\frac{u}{3}\Leftrightarrow u=3v\Rightarrow du=3dv$

$$I_2(t)=\frac{12}{81}\int\frac{dv}{(v^2+1)^2}=\frac{4}{27}\int\frac{dv}{(v^2+1)^2}$$

Comme on l'a déjà revu avec F_2

$$\int\frac{dv}{(v^2+1)^2}=\frac{1}{2}\arctan(v)+\frac{1}{2}\frac{v}{1+v^2}+K$$

$$I_2(t)=\frac{4}{27}\left(\frac{1}{2}\arctan(v)+\frac{1}{2}\frac{v}{1+v^2}\right)+K=\frac{2}{27}\arctan\left(\frac{u}{3}\right)+\frac{2}{27}\frac{\frac{u}{3}}{1+\left(\frac{u}{3}\right)^2}$$

$$=\frac{2}{27}\arctan\left(\frac{u}{3}\right)+\frac{2}{9}\times\frac{u}{9+u^2}=\frac{2}{27}\arctan\left(\frac{t-1}{3}\right)+\frac{2}{9}\times\frac{t-1}{t^2-2t+10}$$

Et finalement

$$F_7(t)=-\frac{3}{2(t^2-2t+10)}+\frac{2}{27}\arctan\left(\frac{t-1}{3}\right)+\frac{2}{9}\times\frac{t-1}{t^2-2t+10}$$

$$=\frac{2}{27}\arctan\left(\frac{t-1}{3}\right)+\frac{\frac{2}{9}t-\frac{31}{18}}{t^2-2t+10}$$

Allez à : Exercice 12

8. $t^2-2t+10$ n'a pas de racine réelle donc
$$\frac{3t+1}{t^2-2t+10}$$
est un élément simple, on met $t^2-2t+10$ sous forme canonique.
$$F_8(t)=\int\frac{3t+1}{((t-1)^2+9)}dt$$
On pose $u=t-1\Leftrightarrow t=u+1\Rightarrow dt=du$
$$F_8(t)=\int\frac{3(u+1)+1}{(u^2+9)}du=\int\frac{3u+4}{u^2+9}du=\int\frac{3u}{u^2+9}du+\int\frac{4}{u^2+3^2}du$$
$$=\frac{3}{2}\ln(u^2+9)+\frac{4}{3}\arctan\left(\frac{u}{3}\right)+K=\frac{3}{2}\ln(t^2-2t+10)+\frac{4}{3}\arctan\left(\frac{t-1}{3}\right)+K$$
Allez à : Exercice 12

9.
$$\frac{1}{t^3+1}=\frac{1}{(t+1)(t^2-t+1)}=\frac{a}{t+1}+\frac{bt+c}{t^2-t+1}$$
$$a=\left[\frac{1}{t^2-t+1}\right]_{t=-1}=\frac{1}{3}$$
On multiplie par t, puis $t\to+\infty$
$$0=a+b\Rightarrow b=-\frac{1}{3}$$
$t=0$,
$$1=a+c\Rightarrow c=\frac{2}{3}$$
$$\frac{1}{t^3+1}=\frac{1}{(t+1)(t^2-t+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{t+1}+\frac{-t+2}{t^2-t+1}\right)$$
$$F_9(t)=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t+1}+\frac{1}{3}\int\frac{-t+2}{t^2-t+1}dt=\frac{1}{3}\ln|t+1|+\frac{1}{3}\int\frac{-t+2}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dt$$
On pose $u=t-\frac{1}{2}\Leftrightarrow t=u+\frac{1}{2}\Rightarrow dt=du$
$$\int\frac{-u+\frac{3}{2}}{u^2+\frac{3}{4}}du=-\int\frac{u}{u^2+\frac{3}{4}}du+\frac{3}{2}\int\frac{1}{u^2+\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2}du=-\frac{1}{2}\ln\left(u^2+\frac{3}{4}\right)+\frac{3}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right)+K$$
$$=-\frac{1}{2}\ln(t^2-t+1)+\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)+K$$
Par conséquent
$$F_9(t)=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t+1}+\frac{1}{3}\int\frac{-t+2}{t^2-t+1}dt$$
$$=\frac{1}{3}\ln|t+1|+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\ln(t^2-t+1)+\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right)+K$$
$$=\frac{1}{3}\ln|t+1|-\frac{1}{6}\ln(t^2-t+1)+\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)+K$$
Allez à : Exercice 12

10. Il faut diviser x^3+2 par $(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1$,
$$x^3+2=1\times(x^3+3x^2+3x+1)+(-3x^2-3x+1)$$
Ce qui entraine que
$$\frac{x^3+2}{(x+1)^3}=1+\frac{-3x^2-3x+1}{(x+1)^3}$$
On cherche alors a, b et c tels que :

$$\frac{-3x^2-3x+1}{(x+1)^3}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{(x+1)^2}+\frac{c}{(x+1)^3}$$
$$c=[-3x^2-3x+1]_{x=-1}=1$$

On multiplie par x, puis $x \to +\infty$
$$-3=a$$
$x=0$
$$1=a+b+c \Rightarrow b=1-a-c=3$$
$$F_{10}(x)=\int \frac{x^3+2}{(x+1)^3}dx=\int\left(1-\frac{3}{x+1}+\frac{3}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+1)^3}\right)dx$$
$$=x-3\ln|x+1|+3\int (x+1)^{-2}dx+\int (x+1)^{-3}dx$$
$$=x-3\ln|x+1|+3(-(x+1)^{-1})+\left(-\frac{1}{2}\right)(x+1)^{-2}+K$$
$$=x-3\ln|x+1|-\frac{3}{x+1}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{(x+1)^2}+K$$

Allez à : Exercice 12

11.

On cherche alors a, b et c tels que :
$$\frac{x+1}{x(x-2)^2}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-2}+\frac{c}{(x-2)^2}$$
$$c=\left[\frac{x+1}{x}\right]_{x=2}=\frac{3}{2}$$

On multiplie par x, puis $x \to +\infty$
$$0=a+b$$
$x=1$
$$2=a-b+c \Leftrightarrow a-b=\frac{1}{2}$$

Donc $a=\frac{1}{4}$ et $b=-\frac{1}{4}$
$$F_{11}(x)=\int \frac{x+1}{x(x-2)^2}dx=\int\left(\frac{\frac{1}{4}}{x}-\frac{\frac{1}{4}}{x-2}+\frac{\frac{3}{2}}{(x-2)^2}\right)dx$$
$$=\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{1}{4}\ln|x-2|+\frac{3}{2}\int (x-2)^{-2}dx=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{x-2}\right|-\frac{3}{2}\times\frac{1}{x-2}+K$$

Allez à : Exercice 12

Correction exercice 13.

1.
$$I_1=\int_0^1 \frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^1=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Allez à : Exercice 13

2.
$$I_2=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{1-x^2}=2\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{1-x^2}$$

Car $x \to \frac{1}{1-x^2}$ est paire

Première méthode parce que $\left[0,\frac{1}{2}\right] \subset]-1,1[$

$$I_2=2\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{1-x^2}=2[\operatorname{argth}(x)]_0^{\frac{1}{2}}=2\operatorname{argth}\left(\frac{1}{2}\right)-2\operatorname{argth}(0)=2\times\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right)=\ln(3)$$

Deuxième méthode (qui marche sur n'importe quel intervalle ne contenant pas -1 et 1).

$$\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{(1-x)(1+x)}=\frac{a}{1-x}+\frac{b}{1+x}=\frac{\frac{1}{2}}{1-x}+\frac{\frac{1}{2}}{1+x}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)$$

$$I_2=2\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{1-x^2}=2\times\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)dx=[-\ln(1-x)+\ln(1+x)]_0^{\frac{1}{2}}=\left[\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right]_0^{\frac{1}{2}}$$
$$=\ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right)-\ln(1)=\ln(3)$$

Attention $\int\frac{dx}{1-x}=-\ln(1-x)+K$, il ne faut pas oublier le signe $-$.

Allez à : Exercice 13

3. x^2+x-3 s'annule en $\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$ et $\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$, comme $[2,3]\subset\left]\frac{-1-\sqrt{13}}{2},\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right[$ $x\to\frac{2x+1}{x^2+x-3}$ est définie et continue sur $[2,3]$.
   A priori il faut décomposer $\frac{2x+1}{x^2+x-3}$ en éléments simples mais il se trouve que $2x+1$ est la dérivée de x^2+x-3, donc

$$I_3=[\ln|x^2+x-3|]_2^3=\ln(9)-\ln(3)=\ln\left(\frac{9}{3}\right)=\ln(3)$$

Allez à : Exercice 13

4. On pose $t=x^2\Rightarrow dt=2xdx$
   $x=0\Rightarrow t=0$ et $x=2\Rightarrow t=4$

$$I_4=\frac{1}{2}\int_0^2\frac{2xdx}{(x^2)^2+16}=\frac{1}{2}\int_0^4\frac{dt}{t^2+4^2}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\left[\arctan\left(\frac{t}{4}\right)\right]_0^4=\frac{1}{8}(\arctan(1)-\arctan(0))=\frac{1}{8}\times\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{\pi}{32}$$

Allez à : Exercice 13

5.
Il existe a,b et c réels tels que

$$\frac{5x+6}{(x^2-4)(x+2)}=\frac{5x+6}{(x-2)(x+2)^2}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+2}+\frac{c}{(x+2)^2}$$

On multiplie par $x-2$, puis $x=2$

$$a=\left[\frac{5x+6}{(x+2)^2}\right]_{x=-2}=\frac{10+6}{(2+2)^2}=1$$

On multiplie par $x+2$, puis $x=-2$

$$c=\left[\frac{5x+6}{x-2}\right]_{x=-2}=\frac{-10+6}{-2-2}=1$$

On multiplie par x, puis $x\to+\infty$

$$0=a+b\Rightarrow b=-1$$

Par conséquent

$$I_5=\int_0^1\left(\frac{1}{x-2}+\frac{-1}{x+2}+\frac{1}{(x+2)^2}\right)dx=\left[\ln|x-2|-\ln|x+2|-\frac{1}{x+2}\right]_{x=0}^{x=1}$$
$$=\ln|-1|-\ln(3)-\frac{1}{3}-\left(\ln|-2|-\ln(2)-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{6}-\ln(3)$$

Allez à : Exercice 13

6.

Il existe a, b, c et d quatre réels tels que :

$$\frac{x-1}{x^2(x^2+1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{cx+d}{x^2+1}$$

On multiplie par x^2+1, puis $X=i$

$$ci+d=\left[\frac{x-1}{x^2}\right]_{X=i}=\frac{i-1}{-1}=1-i$$

Donc $c=-1$ et $d=1$

On multiplie par x^2, puis $x=0$

$$b=\left[\frac{x-1}{x^2+1}\right]_{X=0}=-1$$

On multiplie par x, puis $x\to+\infty$

$$0=a+c$$

Donc $a=-c=1$, finalement

$$\frac{x-1}{x^2(x^2+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{-x+1}{x^2+1}$$

$$I_6=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{x-1}{x^2(x^2+1)}dx=\int_1^{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{-x+1}{x^2+1}\right)dx=\int_1^{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2}\times\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

$$=\left[\ln(x)+\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\arctan(x)\right]_1^{\sqrt{3}}$$

$$=\ln\left(\sqrt{3}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\ln(3+1)+\arctan\left(\sqrt{3}\right)-\left(\ln(1)+1-\frac{1}{2}\ln(1+1)+\arctan(1)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\ln(3)+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\ln(4)+\frac{\pi}{3}-1+\frac{1}{2}\ln(2)-\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\ln\left(3\times\frac{2}{4}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}-1+\frac{\pi}{12}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}-1+\frac{\pi}{12}$$

Allez à : Exercice 13

Correction exercice 14.

1.

$$F_1(x)=\int\frac{\cos^3(x)}{\sin^5(x)}dx$$

D’après les règles de Bioche

$$\frac{\cos^3(-x)}{\sin^5(-x)}d(-x)=\frac{\cos^3(x)}{(-\sin(x))^5}(-dx)=\frac{\cos^3(x)}{-\sin^5(x)}(-dx)=\frac{\cos^3(x)}{\sin^5(x)}dx$$

$$\frac{\cos^3(x+\pi)}{\sin^5(x+\pi)}d(x+\pi)=\frac{(-\cos(x))^3}{(-\sin(x))^5}dx=\frac{-\cos^3(x)}{-\sin^5(x)}dx=\frac{\cos^3(x)}{\sin^5(x)}dx$$

Ici deux des changements de variables sont possibles, $t=\cos(x)$ et $t=\tan(x)$, on va essayer les deux pour constater que $t=\tan(x)$ est meilleur (ce qui est toujours le cas lorsque l’on a le choix entre $\cos(x)$ ou $\sin(x)$ et $\tan(x)$)

Changement de variable $t=\cos(x)\Rightarrow dt=-\sin(x)$.

$$F_1(x)=\int\frac{\cos^3(x)}{\sin^5(x)}dx=\int\frac{\cos^3(x)}{\sin^6(x)}\sin(x)\,dx=-\int\frac{\cos^3(x)}{(\sin^2(x))^3}(-\sin(x)\,dx)$$

$$=-\int\frac{\cos^3(x)}{(1-\cos^2(x))^3}(-\sin(x)\,dx)=-\int\frac{t^3}{(1-t^2)^3}dt$$

Il n’est pas tout simple de décomposer cette fraction rationnelle, on peut toutefois poser $u=t^2\Rightarrow du=2tdt$

$$F_1(x) = -\frac{1}{2}\int \frac{t^2}{(1-t^2)^3} 2t dt = -\frac{1}{2}\int \frac{u}{(1-u)^3} du = -\frac{1}{2}\int \frac{u-1+1}{(1-u)^3} du$$
$$= -\frac{1}{2}\int \left(-\frac{1}{(1-u)^2} + \frac{1}{(1-u)^3}\right) du = \frac{1}{2}\int (1-u)^{-2} du - \frac{1}{2}\int (1-u)^{-3} du$$
$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}(-1)(1-u)^{-1}\right] - \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}(-1)(1-u)^{-2}\right] + K$$
$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{1-u} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{(1-u)^2} + K = \frac{1}{4} \times \frac{1}{1-t^2} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{(1-t^2)^2} + K$$
$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{1-\cos^2(t)} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{(1-\cos^2(t))^2} + K = \frac{1}{4} \times \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{\sin^4(x)} + K$$
$$= \frac{1}{4}\frac{(\sin^2(x) - 1)}{\sin^4(x)} + K = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{\tan^4(x)} + K$$

Changement de variable $t = \tan(x) \Rightarrow dt = \frac{dx}{\cos^2(x)}$

$$F_1(x) = \int \frac{\cos^3(x)}{\sin^5(x)} dx = \int \frac{\cos^5(x)}{\sin^5(x)} \frac{dx}{\cos^2(x)} = \int \frac{1}{\frac{\sin^5(x)}{\cos^5(x)}} \frac{dx}{\cos^2(x)} = \int \frac{1}{\tan^5(x)} \frac{dx}{\cos^2(x)} = \int \frac{1}{t^5} dt$$
$$= \int t^{-5} dt = -\frac{1}{4} t^{-4} + K' = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{\tan^4(x)} + K'$$

C’est nettement plus simple.

Allez à : Exercice 14

2. On applique encore les règles de Bioche.

$$\frac{\sin^3(-x)}{1+\cos(-x)} d(-x) = \frac{-\sin^3(x)}{1+\cos(x)} (-dx) = \frac{\sin^3(x)}{1+\cos(x)} dx$$

C’est le seul invariant qui fonctionne, on doit faire le changement de variable $t = \cos(x) \Rightarrow dt = -\sin(x)\, dx$

$$F_2(x) = -\int \frac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)} (-\sin(x) dx) = -\int \frac{1-t^2}{1+t} dt = \int \frac{t^2-1}{1+t} dt = \int (t-1) dt = \frac{t^2}{2} - t + K$$
$$= \frac{\cos^2(x)}{2} - \cos(x) + K$$

Allez à : Exercice 14

3.

$$\frac{d(x+\pi)}{\cos^4(x+\pi) + \sin^4(x+\pi)} = \frac{dx}{(-\cos(x))^4 + (-\sin(x))^4} = \frac{dx}{\cos^4(x) + \sin^4(x)}$$

Donc on doit faire le changement de variable $t = \tan(x)$

Première méthode

On fait apparaître $dt = \frac{dx}{\cos^2(x)}$

$$F_3(x) = \int \frac{\cos^2(x)}{\cos^4(x) + \sin^4(x)} \frac{dx}{\cos^2(x)}$$

Et la règle de Bioche dit que $\frac{\cos^2(x)}{\cos^4(x)+\sin^4(x)}$ peut s’exprimer en fonction de $\tan(x)$

$$\frac{\cos^2(x)}{\cos^4(x) + \sin^4(x)} = \frac{\cos^2(x)}{\cos^4(x)\,(1+\tan^4(x))} = \frac{1}{\cos^2(x)\,(1+\tan^4(x))}$$

Or $\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$

$$\frac{\cos^2(x)}{\cos^4(x) + \sin^4(x)} = \frac{1+\tan^2(x)}{1+\tan^4(x)}$$

Donc

$$F_3(x) = \int \frac{1+t^2}{1+t^4} dt$$

Deuxième méthode

$$t=\tan(x)\Leftrightarrow x=\arctan(t)\Rightarrow dx=\frac{dt}{1+t^2}$$
$$\cos^2(x)=\frac{1}{1+\tan^2(x)}\Rightarrow \cos^4(x)=\frac{1}{(1+\tan^2(x))^2}$$
$$\sin^2(x)=1-\cos^2(x)=1-\frac{1}{1+\tan^2(x)}=\frac{\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)}\Rightarrow \sin^4(x)=\frac{\tan^4(x)}{(1+\tan^2(x))^2}$$

Donc

$$F_3(x)=\int\frac{1}{\cos^4(x)+\sin^4(x)}dx=\int\frac{1}{\frac{1}{(1+t^2)^2}+\frac{t^4}{(1+t^2)^2}}\frac{dt}{1+t^2}=\int\frac{(1+t^2)^2}{1+t^4}\frac{dt}{1+t^2}$$
$$=\int\frac{1+t^2}{1+t^4}dt$$

On retrouve le même résultat heureusement, il reste à trouver une primitive de $t\to\frac{1+t^2}{1+t^4}$ et ce n'est pas simple.

$$\frac{1+t^2}{1+t^4}=\frac{1+t^2}{t^4+2t^2+1-2t^2}=\frac{1+t^2}{(t^2+1)^2-\left(\sqrt{2}t\right)^2}=\frac{1+t^2}{\left(t^2-\sqrt{2}t+1\right)\left(t^2-\sqrt{2}t+1\right)}$$
$$=\frac{at+b}{t^2-\sqrt{2}t+1}+\frac{ct+d}{t^2+\sqrt{2}t+1}$$

Car $t^2-\sqrt{2}t+1$ et $t^2+\sqrt{2}t+1$ sont deux polynômes sans racines réelles.

Remarque :

On peut aussi résoudre dans $\mathbb{C}$: $t^4=-1$, on trouve quatre racines complexes $z_k=e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right)}$, $k\in\{0,1,2,3\}$ que l'on regroupe ainsi

$$t^4+1=[(t-z_0)(t-z_3)][(t-z_1)(z-z_3)]$$

Puisque $z_0=\overline{z_3}$ et $z_1=\overline{z_2}$

$t\to\frac{1+t^2}{1+t^4}$ est paire, on en déduit que :

$$t^4+1=(-t)^4+1\Leftrightarrow\frac{at+b}{t^2-\sqrt{2}t+1}+\frac{ct+d}{t^2+\sqrt{2}t+1}=\frac{-at+b}{t^2+\sqrt{2}t+1}+\frac{-ct+d}{t^2-\sqrt{2}t+1}$$

Donc $c=-a$ et $d=b$

$t=0$ entraine que $1=b+d$ par conséquent $b=d=\frac{1}{2}$.

$t=i$ entraine que

$$0=\frac{ai+\frac{1}{2}}{-\sqrt{2}i}+\frac{-ai+\frac{1}{2}}{\sqrt{2}i}\Leftrightarrow 0=-\frac{2a}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow a=0$$
$$\frac{1+t^2}{1+t^4}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t^2-\sqrt{2}t+1}+\frac{1}{t^2+\sqrt{2}t+1}\right)$$
$$\int\frac{dt}{t^2-\sqrt{2}t+1}=\int\frac{dt}{\left(t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}$$

On pose $u=t-\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow t=u+\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow dt=du$

$$\int\frac{dt}{t^2-\sqrt{2}t+1}=\int\frac{du}{u^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{2}\arctan\left(u\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}t-1\right)\right)$$
$$\int\frac{dt}{t^2+\sqrt{2}t+1}=\sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}t+1\right)\right)$$

En faisant pareil ou en faisant le changement de variable $t'=-t$.

Donc

$$F_3(x)=\int\frac{1+t^2}{1+t^4}dt=\sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}t-1\right)\right)+\sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}t+1\right)\right)+K$$
$$=\sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}\tan(x)-1\right)\right)+\sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}\tan(x)+1\right)\right)+K$$

4.

Avec les règles de Bioche

$$\frac{\cos(-x)-2}{\sin(-x)}d(-x)=\frac{\cos(x)-2}{-\sin(x)}(-dx)=\frac{\cos(x)-2}{\sin(x)}dx$$

On fait le changement de variable $t=\cos(x)$

$$dt=-\sin(x)\,dx$$

Alors

$$F_4(x)=\int\frac{\cos(x)-2}{\sin(x)}dx=\int\frac{\cos(x)-2}{\sin(x)\,(-\sin(x))}(-\sin(x))dx=-\int\frac{\cos(x)-2}{\sin^2(x)}(-\sin(x))dx$$
$$=-\int\frac{\cos(x)-2}{1-\cos^2(x)}(-\sin(x))dx=-\int\frac{t-2}{1-t^2}dt=\int\frac{t-2}{t^2-1}dt$$

Il faut alors décomposer la fraction rationnelle $\frac{t-2}{t^2-1}$ en élément simple

$$\frac{t-2}{t^2-1}=\frac{t-2}{(t-1)(t+1)}$$

Il existe a et b réels tels que

$$\frac{t-2}{(t-1)(t+1)}=\frac{a}{t-1}+\frac{b}{t+1}$$

On multiplie par $t-1$, puis $t=1$

$$a=\left[\frac{t-2}{t+1}\right]_{t=1}=-\frac{1}{2}$$

On multiplie par $t+1$, puis $t=-1$

$$b=\left[\frac{t-2}{t-1}\right]_{t=-1}=-\frac{3}{2}$$

Donc

$$F_4(x)=\int\frac{\cos(x)-2}{\sin(x)}dx=\int\left(\frac{-\frac{1}{2}}{t-1}+\frac{\frac{3}{2}}{t+1}\right)dt=-\frac{1}{2}\ln|t-1|+\frac{3}{2}\ln|t+1|+K$$
$$=-\frac{1}{2}\ln|\cos(x)-1|+\frac{3}{2}\ln|\cos(x)+1|+K$$
$$=-\frac{1}{2}\ln(1-\cos(x))+\frac{3}{2}\ln(\cos(x)+1)+K$$

Allez à : Exercice 14

Correction exercice 15.

On pose $f(x)=\frac{1}{\cos(x)\sin(x)}$ pour appliquer les règles de Bioches

$$f(-x)d(-x)=\frac{1}{\cos(-x)\sin(-x)}(-dx)=\frac{-1}{\cos(x)\sin(x)}(-dx)=\frac{1}{\cos(x)\sin(x)}dx$$

On peut faire le changement de variable $t=\cos(x)$

$$f(\pi-x)d(\pi-x)=\frac{1}{\cos(\pi-x)\sin(\pi-x)}\big(d(\pi-x)\big)=\frac{1}{-\cos(x)\sin(x)}(-dx)$$
$$=\frac{1}{\cos(x)\sin(x)}dx$$

On peut faire le changement de variable $t=\sin(x)$

$$f(\pi+x)=\frac{1}{\cos(\pi+x)\sin(\pi+x)}d(\pi+x)=\frac{1}{(-\cos(x))(-\sin(x))}dx=\frac{1}{\cos(x)\sin(x)}dx$$

On peut faire le changement de variable $t=\tan(x)$

Le meilleur est $t=\tan(x)$, mais on va en faire deux histoire de comparer les différents changements de variables.

On commence par $t=\sin(x)$, il faut faire apparaitre la dérivée de sin au numérateur

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\cos(x)\sin(x)}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos(x)dx}{\cos^2(x)\sin(x)}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos(x)dx}{(1-\sin^2(x))\sin(x)}$$

$$x=\frac{\pi}{6}\Rightarrow t=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$$

$$x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow t=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$dt=\cos(t)\,dt$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos(x)dx}{(1-\sin^2(x))\sin(x)}=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{dt}{(1-t^2)t}$$

Or

$$\frac{1}{(1-t^2)t}=\frac{-1}{(t-1)(t+1)t}=\frac{a}{t-1}+\frac{b}{t+1}+\frac{c}{t}$$

On multiplie par $t-1$, puis $t=1$

$$a=\left[\frac{-1}{(t+1)t}\right]_{t=1}=-\frac{1}{2}$$

On multiplie par $t+1$, puis $t=-1$

$$b=\left[\frac{-1}{(t-1)t}\right]_{t=-1}=-\frac{1}{2}$$

On multiplie par t, puis $t=0$

$$a=\left[\frac{-1}{(t-1)(t+1)}\right]_{t=0}=1$$

Par conséquent

$$I=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{dt}{(1-t^2)t}=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{-\frac{1}{2}}{t-1}+\frac{-\frac{1}{2}}{t+1}+\frac{1}{t}\right)dt=\left[-\frac{1}{2}\ln|t-1|-\frac{1}{2}\ln|t+1|+\ln|t|\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\left[\ln\left|\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right|\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{1-\frac{3}{4}}}\right|-\ln\left|\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}\right|=\ln(\sqrt{3})-\ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=2\ln(\sqrt{3})$$

Pour le changement de variable $t=\cos(x)$ c'est quasiment pareil, il faut faire apparaitre la dérivée de cos au numérateur, on passe

Changement de variable $t=\tan(x)$, il faut faire apparaitre la dérivée de tan au numérateur

$$dt=\frac{dx}{\cos^2(x)}=(1+\tan^2(x))dx$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos(x)\sin(x)} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos(x)\,dx}{\cos^2(x)\sin(x)} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \times \frac{dx}{\cos^2(x)} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}} \times \frac{dx}{\cos^2(x)}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan(x)} \times \frac{dx}{\cos^2(x)}$$

$$x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \tan(x) = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \tan(x) = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos(x)\sin(x)} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan(x)} \times \frac{dx}{\cos^2(x)} = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{t}\,dt = [\ln(t)]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} = \ln(\sqrt{3}) - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \ln(\sqrt{3}) + \ln(\sqrt{3}) = 2\ln(\sqrt{3})$$

C'est effectivement plus simple.

Allez à : Exercice 15

Correction exercice 16.

$$\frac{\cos^3(-t)}{\sin^4(-t)}d(-t) = -\frac{\cos^3(t)}{\sin^4(t)}dt \neq \frac{\cos^3(t)}{\sin^4(t)}dt$$

$$\frac{\cos^3(\pi - t)}{\sin^4(\pi - t)}d(\pi - t) = \frac{(-\cos(-t))^3}{(\sin(t))^4}(-dt) = \frac{\cos^3(t)}{\sin^4(t)}dt$$

$$\frac{\cos^3(\pi + t)}{\sin^4(\pi + t)}d(\pi + t) = \frac{(-\cos(t))^3}{(-\sin(t))^4}dt = \frac{-\cos^3(t)}{\sin^4(t)}dt = -\frac{\cos^3(t)}{\sin^4(t)}dt \neq \frac{\cos^3(t)}{\sin^4(t)}dt$$

On fait le changement de variable $x = \sin(t) \Rightarrow dx = \cos(t)\,dt$

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3(t)}{\sin^4(t)}dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(t)}{\sin^4(t)}\cos(t)\,dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2(t)}{\sin^4(t)}\cos(t)\,dt$$

$$t = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1 - x^2}{x^4}dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^2}\right)dx \int_{\frac{1}{2}}^{1} (x^{-4} - x^{-2})dx = \left[-\frac{1}{3}x^{-3} + x^{-1}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \left[-\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{1}{1} - \left(-\frac{2^3}{3} + 2\right) = \frac{7}{3} - 1 = \frac{4}{3}$$

Allez à : Exercice 16

Correction exercice 17.

1. Avec les règles de Bioche

$$f(t + \pi)d(t + \pi) = \frac{1}{\sin(2(t + \pi))}dt = \frac{1}{\sin(2t)}dt = f(t)dt$$

On peut faire le changement de variable $u = \tan(t)$

$$du=\frac{dt}{\cos^2(t)}$$

$$\frac{1}{\sin(2t)}=\frac{1}{2\sin(t)\cos(t)}=\frac{\cos(t)}{2\sin(t)}\frac{1}{\cos^2(t)}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\tan(t)}\times\frac{dt}{\cos^2(t)}$$

Donc

$$\int f(t)dt=\int\frac{1}{2}\times\frac{1}{\tan(t)}\times\frac{dt}{\cos^2(t)}=\frac{1}{2}\int\frac{1}{u}du=\frac{1}{2}\ln|u|+K=\frac{1}{2}\ln|\tan(t)|$$

On a pris $K=0$ car une demande « une » primitive de f.

2. $dx=2dt$ et $t=\frac{x}{2}$

$$F(x)=\int\frac{1}{\sin(x)}dx=2\int\frac{1}{\sin(2t)}dt=2\times\frac{1}{2}\ln|\tan(t)|+K=\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|+K$$

Allez à : Exercice 17

Correction exercice 18.

On pose $f(x)=\frac{2}{1+\tan(x)}$

$$f(-x)d(-x)=\frac{2}{1+\tan(-x)}(-dx)=\frac{-2}{1-\tan(x)}dx\neq f(x)dx$$

$$f(\pi-x)d(\pi-x)=\frac{2}{1+\tan(\pi-x)}(-dx)=\frac{-2}{1-\tan(x)}dx\neq f(x)dx$$

$$f(\pi+x)d(\pi+x)=\frac{2}{1+\tan(\pi+x)}dx=\frac{2}{1+\tan(x)}dx=f(x)dx$$

On fait le changement de variable $t=\tan(x)$, $dt=(1+\tan^2(x))dx$

$$F(x)=\int\frac{2}{(1+\tan(x))(1+\tan^2(x))}(1+\tan^2(x))dx=\int\frac{2}{(1+t)(1+t^2)}dt$$

Il existe a, b et c réels tels que

$$\frac{2}{(1+t)(1+t^2)}=\frac{a}{1+t}+\frac{bt+c}{1+t^2}$$

On multiplie par $t+1$, puis $t=-1$

$$a=\left[\frac{2}{1+t^2}\right]_{t=-1}=1$$

On multiplie par t^2+1, puis $t=i$

$$bi+c=\left[\frac{2}{1+t}\right]_{t=i}=\frac{2}{1+i}=\frac{2(1-i)}{2}=1-i$$

Donc $b=-1$ et $c=1$

$$\begin{aligned}F(x)&=\int\left(\frac{1}{1+t}+\frac{-t+1}{1+t^2}\right)dt=\ln|t+1|-\int\frac{t}{t^2+1}dt+\int\frac{1}{1+t^2}dt\\&=\ln|t+1|-\frac{1}{2}\ln(t^2+1)+\arctan(t)+K\\&=\ln|\tan(x)+1|-\frac{1}{2}\ln(\tan^2(x)+1)+\arctan(\tan(x))+K\\&=\ln|\tan(x)+1|-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{\cos^2(x)}\right)+x+K=\ln\left|\frac{\sin(x)}{\cos(x)}+1\right|+\ln|\cos(x)|+x+K\\&=\ln|\sin(x)+\cos(x)|+x+K\end{aligned}$$

Allez à : Exercice 18

Correction exercice 19.

On pose $x=e^t$ donc $t=\ln(x)$ et $dt=\frac{dx}{x}$

D'autre part

$$1+\operatorname{ch}(t)=1+\frac{e^t+e^{-t}}{2}=1+\frac{x+\frac{1}{x}}{2}=1+\frac{x^2+1}{2x}=\frac{2x+x^2+1}{2x}=\frac{(x+1)^2}{2x}$$

Donc

$$F(t)=\int\frac{2x}{(x+1)^2}\frac{dx}{x}=2\int\frac{1}{(x+1)^2}dx=2\int(x+1)^{-2}dx=-2(x+1)^{-1}+K=\frac{-2}{x+1}+K$$
$$=\frac{-2}{e^t+1}+K$$

Allez à : Exercice 19

Correction exercice 20.

$$F(x)=\int\frac{1+\operatorname{sh}(x)}{1+\operatorname{ch}(x)}dx$$

On fait le changement de variable $t=e^x$, soit $x=\ln(t)$, $dx=\frac{dt}{t}$

$$\frac{1+\operatorname{sh}(x)}{1+\operatorname{ch}(x)}=\frac{1+\frac{t-\frac{1}{t}}{2}}{1+\frac{t+\frac{1}{t}}{2}}=\frac{1+\frac{t^2-1}{2t}}{1+\frac{t^2+1}{2t}}=\frac{2t+t^2-1}{2t+t^2+1}=\frac{t^2+2t-1}{(t+1)^2}$$

$$F(x)=\int\frac{1+\operatorname{sh}(x)}{1+\operatorname{ch}(x)}dx=\int\frac{t^2+2t-1}{(t+1)^2}\frac{dt}{t}$$

On décompose $\frac{t^2+2t-1}{t(t-1)^2}$ en éléments simples, il existe a, b et c tels que :

$$\frac{t^2+2t-1}{t(t+1)^2}=\frac{a}{t}+\frac{b}{(t+1)^2}+\frac{c}{t+1}$$

Je multiplie par t, puis $t=0$, $a=\left[\frac{t^2+2t-1}{(t+1)^2}\right]_{t=0}=-1$

Je multiplie par $(t+1)^2$, puis $t=-1$, $b=\left[\frac{t^2+2t-1}{t}\right]_{t=-1}=2$

Je multiplie par t, puis $t\to\infty$, $1=a+c$, donc $c=2$.

$$F(x)=\int\left(\frac{-1}{t}+\frac{2}{(t+1)^2}+\frac{2}{t+1}\right)dt=-\ln|t|-\frac{2}{t+1}+2\ln|t+1|+K$$

$$F(x)=-x-\frac{2}{e^x+1}+2\ln|e^x+1|+K$$

Allez à : Exercice 20

Correction exercice 21.

On pose $t=e^x\Leftrightarrow x=\ln(t)\Rightarrow dx=\frac{dt}{t}$

$$\operatorname{ch}(x)+1=\frac{e^x+e^{-x}}{2}+1=\frac{e^{2x}+1}{2e^x}+1=\frac{t^2+1}{2t}+1=\frac{t^2+1+2t}{2t}=\frac{(t+1)^2}{2t}$$

$$\int \frac{dx}{(\operatorname{ch}(x)+1)^2} = \int \left(\frac{2t}{(t+1)^2}\right)^2 \frac{dt}{t} = \int \frac{4t}{(t+1)^4} dt = 4\int \frac{t+1-1}{(t+1)^4} dt$$
$$= 4\int \left(\frac{1}{(t+1)^3} - \frac{1}{(t+1)^4}\right) dt = 4\int \left((t+1)^{-3} - (t+1)^{-4}\right) dt$$
$$= 4\left[-\frac{1}{2}(t+1)^{-2} + \frac{1}{3}(t+1)^{-3}\right] + K = -\frac{2}{(t+1)^2} + \frac{4}{3(t+1)^3} + K$$
$$= -\frac{2}{(e^x+1)^2} + \frac{4}{3(e^x+1)^3} + K = \frac{6(e^x+1)+4}{3(e^x+1)^3} + K = 2\frac{3e^x+5}{3(e^x+1)^3} + K$$

Allez à : Exercice 21

Correction exercice 22.

On pose $t = e^x \Leftrightarrow x = \ln(t)$ donc $dx = \frac{dt}{t}$

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{t + \frac{1}{t}}{2} = \frac{t^2+1}{2t}$$
$$\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{t - \frac{1}{t}}{2} = \frac{t^2-1}{2t}$$
$$\frac{\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x) - 1} = \frac{\frac{t^2+1}{2t} - \frac{t^2-1}{2t}}{\frac{t^2+1}{2t} - 1} = \frac{\frac{1}{t}}{\frac{t^2+1-2t}{2t}} = \frac{1}{(t-1)^2}$$
$$F(x) = \int \frac{2dt}{t(t-1)^2}$$

Il existe a, b et c réels tels que :

$$\frac{2}{t(t-1)^2} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t-1} + \frac{c}{(t-1)^2}$$

Je multiplie par t, puis $t = 0$

$$a = \left[\frac{2}{(t-1)^2}\right]_{t=0} = 2$$

Je multiplie par $(t-1)^2$, puis $t = 1$

$$c = \left[\frac{2}{t}\right]_{t=0} = 2$$

Je multiplie par t, puis $t \to +\infty$

$$0 = a + b \Leftrightarrow b = -2$$

$$F(x) = 2\int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t-1} + \frac{1}{(t-1)^2}\right) dt = 2\left(\ln|t| - \ln|t-1| - \frac{1}{t-1}\right) + K$$
$$= 2\left(\ln(e^x) - \ln(e^x - 1) - \frac{1}{e^x - 1}\right) + K = 2x - 2\ln(e^x - 1) - \frac{2}{e^x - 1} + K,$$
$K \in \mathbb{R}$

Allez à : Exercice 22

Correction exercice 23.

Il s'agit d'une fraction rationnelle de fonctions hyperboliques, on peut faire le changement de variable $t = e^x$, donc $x = \ln(t)$ et $dx = \frac{dt}{t}$

$$\frac{2 - \operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x)}{2\operatorname{ch}(x)} = \frac{2 - \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}}{2\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{2 - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{2 - \frac{1}{t}}{t + \frac{1}{t}} = \frac{2t-1}{t^2+1}$$

$$\int \frac{2-\operatorname{ch}(x)+\operatorname{sh}(x)}{2\operatorname{ch}(x)}dx=\int \frac{2t-1}{t^2+1}\frac{dt}{t}=\int \frac{2t-1}{(t^2+1)t}dt$$

Il existe a, b et c réels tels que

$$\frac{2t-1}{(t^2+1)t}=\frac{a}{t}+\frac{bt+c}{t^2+1}$$

$$a=\left[\frac{2t-1}{t^2+1}\right]_{t=0}=-1$$

$$bi+c=\left[\frac{2t-1}{t}\right]_{t=i}=\frac{2i-1}{i}=2+i$$

$b=1$ et $c=2$. Par conséquent

$$\frac{2t-1}{(t^2+1)t}=\frac{-1}{t}+\frac{t+2}{t^2+1}$$

$$\int \frac{2-\operatorname{ch}(x)+\operatorname{sh}(x)}{2\operatorname{ch}(x)}dx=\int\left(\frac{-1}{t}+\frac{t+2}{t^2+1}\right)dt=-\ln|t|+\frac{1}{2}\int\frac{2t}{t^2+1}dt+2\int\frac{1}{t^2+1}dt$$

$$=-\ln|t|+\frac{1}{2}\ln(t^2+1)+2\arctan(t)+K$$

$$=-\ln(e^x)+\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)+2\arctan(e^x)+K$$

$$=-x+\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)+2\arctan(e^x)+K$$

Autre méthode

$$\frac{2-\operatorname{ch}(x)+\operatorname{sh}(x)}{2\operatorname{ch}(x)}=\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$$

Donc

$$\int \frac{2-\operatorname{ch}(x)+\operatorname{sh}(x)}{2\operatorname{ch}(x)}dx=\int\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}\right)dx$$

Comme

$$\int\frac{dx}{\operatorname{ch}(x)}=\int\frac{\frac{1}{t}}{\frac{t^2+1}{2t}}dt=\int\frac{2dt}{t^2+1}=2\arctan(t)+K=2\arctan(e^x)$$

$$\int \frac{2-\operatorname{ch}(x)+\operatorname{sh}(x)}{2\operatorname{ch}(x)}dx=2\arctan(e^x)-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln(\operatorname{ch}(x)+K'$$

Allez à : Exercice 23

Correction exercice 24.

1. Il existe a, b et c réels tels que :

$$f(x)=\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}$$

On multiplie par x, puis $x=0$

$$a=\left[\frac{1}{(x-1)^2}\right]_{X=0}=1$$

On multiplie par $(x-1)^2$, puis $x=1$

$$c=\left[\frac{1}{x}\right]_{x=1}=1$$

On multiplie par x, puis $x\to+\infty$

$$0=a+b\Leftrightarrow b=-1$$

$$f(x)=\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

2. $dx=2\operatorname{ch}(t)\operatorname{sh}(t)\,dt$

$$F(t)=2\int\frac{dt}{\operatorname{ch}(t)\operatorname{sh}^3(t)}=2\int\frac{\operatorname{ch}(t)\operatorname{sh}(t)\,dt}{\operatorname{ch}^2(t)\operatorname{sh}^4(t)}=2\int\frac{\operatorname{ch}(t)\operatorname{sh}(t)\,dt}{\operatorname{ch}^2(t)\operatorname{sh}^4(t)}=2\int\frac{\operatorname{ch}(t)\operatorname{sh}(t)\,dt}{\operatorname{ch}^2(t)\,(\operatorname{sh}^2(t))^2}$$
$$=\int\frac{2\operatorname{ch}(t)\operatorname{sh}(t)\,dt}{\operatorname{ch}^2(t)\,(\operatorname{ch}^2(t)-1)^2}=\int\frac{dx}{x(x-1)^2}=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx$$
$$=\ln|x|-\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+K\ =\ln(\operatorname{ch}(t))-\ln(\operatorname{ch}(t)-1)-\frac{1}{\operatorname{ch}(t)-1}+K,\quad K\in\mathbb{R}$$

Allez à : Exercice 24

Correction exercice 25.

A l'aide d'une intégration par partie

$\int(2t-1)\ln(t^2+1)\,dt$	
$u'(t)=3t^2-2t$	$u(t)=t^3-t^2$
$v(t)=\ln(t^2+1)$	$v'(t)=\frac{2t}{t^2+1}$
$F(x)=[(t^3-t^2)\ln(t^2+1)]-$	$\int(t^3-t^2)\frac{2t}{t^2+1}$

$$F(x)=[(t^3-t^2)\ln(t^2+1)]-2\int\frac{t^4-t^3}{t^2+1}dt$$

Il faut diviser t^4-t^3 par t^2+1

$$\begin{array}{r|l} t^4-t^3\qquad\quad & t^2+1 \\ \cline{2-2} t^4\qquad+t^2 & t^2-t-1 \\ \hline -t^3-t^2 & \\ -t^3\qquad-t & \\ \hline -t^2+t & \\ -t^2\qquad-1 & \\ t+1 & \end{array}$$

$$t^4-t^3=(t^2+1)(t^2-t-1)+t+1\Rightarrow\frac{t^3-t^2}{t^2+1}=t^2-t-1+\frac{t+1}{t^2+1}$$
$$F(x)=(t^3-t^2)\ln(t^2+1)-2\int\left(t^2-t-1+\frac{t+1}{t^2+1}\right)dt$$
$$=(t^3-t^2)\ln(t^2+1)-2\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t\right)-2\left(\int\frac{t}{t^2+1}dt+\int\frac{1}{t^2+1}dt\right)$$
$$=(t^3-t^2)\ln(t^2+1)-\frac{2}{3}t^3+t^2-2t-\ln(t^2+1)-2\arctan(t)+K$$
$$=(t^3-t^2-1)\ln(t^2+1)-\frac{2}{3}t^3+t^2-2t-2\arctan(t)+K$$

Allez à : Exercice 25

Correction exercice 26.

a.

$$I_1=\int_1^e t\ln(t)\,dt$$

$$u'(t) = t \qquad u(t) = \frac{t^2}{2}$$
$$v(t) = \ln(t) \qquad v'(t) = \frac{1}{t}$$
$$I_1 = \left[\frac{t^2}{2}\ln(t)\right]_1^e - \int_1^e \frac{t}{2}dt$$

Donc

$$I_1 = \frac{e^2}{2}\ln(e) - \frac{1^2}{2}\ln(1) - \left[\frac{t^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2-1}{4} = \frac{2e^2-e^2+1}{4} = \frac{e^2+1}{4}$$

b.

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\,dt$$
$$u'(t) = \sin(t) \qquad u(t) = -\cos(t)$$
$$v(t) = t \qquad v'(t) = 1$$
$$I_2 = [-t\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,dt$$

Donc

$$I_2 = -\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 0\times\cos(0) + [\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

c.

$\int_0^{\sqrt{3}} 3x^2\ln(x^2+1)\,dx$	
$u'(x) = 3x^2$	$u(x) = x^3$
$v(x) = \ln(x^2+1)$	$v'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$
$\int_0^{\sqrt{3}} 3x^2\ln(x^2+1)\,dx = [x^3\ln(x^2+1)]_0^{\sqrt{3}} -$	$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{2x^4}{x^2+1}dx$

Il faut alors décomposer $\frac{2x^4}{x^2+1}$ en éléments simples, pour cela il faut faire une division euclidienne de $2x^4$ par x^2+1

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 & x^2+1 \\ \cline{2-2} 2x^4+2x^2 & 2x^2-2 \\ \cline{1-1} -2x^2 & \\ -2x^2-2 & \\ \cline{1-1} 2 & \end{array}$$

Donc

$$2x^4 = (x^2+1)(2x^2-2) + 2$$

Ce qui entraine que

$$\frac{2x^4}{x^2+1} = 2x^2 - 2 + \frac{2}{x^2+1}$$

Par conséquent

$$I_3=\int_0^{\sqrt{3}}3x^2\ln(x^2+1)\,dx=[x^3\ln(x^2+1)]_0^{\sqrt{3}}-\int_0^{\sqrt{3}}\left(2x^2-2+\frac{2}{x^2+1}\right)dx$$
$$=\left(\sqrt{3}\right)^3\ln\left(\left(\sqrt{3}\right)^2+1\right)-\left[\frac{2}{3}x^3-2x+2\arctan(x)\right]_0^{\sqrt{3}}$$
$$=3\sqrt{3}\ln(4)-\left(\frac{2}{3}\left(\sqrt{3}\right)^3-2\sqrt{3}+2\arctan\left(\sqrt{3}\right)\right)$$
$$=6\sqrt{3}\ln(2)-\left(2\sqrt{3}-2\sqrt{3}+2\times\frac{\pi}{3}\right)=6\sqrt{3}\ln(2)-\frac{2\pi}{3}$$

Allez à : Exercice 26

Correction exercice 27.

1. $\frac{2x}{(x^2-1)^2}$ est de la forme $\frac{u'(x)}{(u(x))^2}$, cela serait maladroit de décomposer cette fraction en éléments simple (mais c'est possible)
$$\int\frac{2x}{(x^2-1)^2}dx=\int 2x(x^2-1)^{-2}dx=-(x^2-1)^{-1}+K=\frac{-1}{x^2-1}+K$$

2.
$$G(x)=\int\frac{2x}{(x^2-1)^2}\ln(x)\,dx=\left[\frac{-1}{x^2-1}\ln(x)\right]-\int\frac{-1}{x(x^2-1)}dx$$
$$=\frac{-1}{x^2-1}\ln(x)+\int\frac{1}{x(x-1)(x+1)}dx$$
$$\frac{1}{x(x-1)(x+1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x+1}$$
Je multiplie par x, puis $x=0$
$$a=\left[\frac{1}{(x-1)(x+1)}\right]_{x=0}=-1$$
Je multiplie par $x-1$, puis $x=1$
$$b=\left[\frac{1}{x(x+1)}\right]_{x=0}=\frac{1}{2}$$
Je multiplie par $x+1$, puis $x=-1$
$$c=\left[\frac{1}{x(x-1)}\right]_{x=0}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{x(x-1)(x+1)}=\frac{-1}{x}+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{\frac{1}{2}}{x+1}$$
$$G(x)=\frac{-1}{x^2-1}\ln(x)+\int\left(\frac{-1}{x}+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{\frac{1}{2}}{x+1}\right)dx$$
$$=\frac{-1}{x^2-1}\ln(x)-\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x+1|+K$$
$$=\frac{-1}{x^2-1}\ln(x)-\ln(x)+\frac{1}{2}\ln(x-1)+\frac{1}{2}\ln(x+1)+K$$
$$=\frac{-x^2}{x^2-1}\ln(x)+\frac{1}{2}\ln(x^2-1)+K$$

Allez à : Exercice 27

Correction exercice 28.

$\int \frac{1}{(x+1)^2}\arctan(x)\,dx$

$u'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} = (x+1)^{-2}$ $\quad u(x) = -(x+1)^{-1} = -\frac{1}{x+1}$

$v(x) = \arctan(x)$ $\quad v'(x) = \frac{1}{x^2+1}$

$\int \frac{1}{(x+1)^2}\arctan(x)\,dx = \left[-\frac{1}{x+1}\arctan(x)\right] - \int \frac{-1}{x+1}\times\frac{1}{x^2+1}dx$

$$\int \frac{1}{(x+1)^2}\arctan(x)\,dx = \left[-\frac{1}{x+1}\arctan(x)\right] + \int \frac{1}{x+1}\times\frac{1}{x^2+1}dx$$

Or il existe a, b et c réels tels que

$$\frac{1}{x+1}\times\frac{1}{x^2+1} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$

On multiplie par $x+1$, puis $x=-1$

$$a = \left[\frac{1}{x^2+1}\right]_{x=-1} = \frac{1}{2}$$

On multiplie par x^2+1, puis $x=i$

$$bi + c = \left[\frac{1}{x+1}\right]_{x=i} = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}$$

Donc $b = -\frac{1}{2}$ et $c = \frac{1}{2}$.

Par conséquent

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x+1)^2}\arctan(x)\,dx &= -\frac{1}{x+1}\arctan(x) + \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x+1} + \frac{-x+1}{x^2+1}\right)dx\\
&= -\frac{1}{x+1}\arctan(x) + \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\left(\int -\frac{x}{x^2+1}dx + \int\frac{1}{x^2+1}dx\right)\\
&= -\frac{1}{x+1}\arctan(x) + \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \arctan(x)\right) + K\\
&= -\frac{1}{x+1}\arctan(x) + \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\arctan(x) + K\end{aligned}$$

Allez à : Exercice 28

Correction exercice 29.

1. Dans cet exemple il ne faut pas calculer dt, mais il faut trouver x en fonction de t :

$$t = \sqrt[6]{2+x} \Leftrightarrow t^6 = 2+x \Leftrightarrow x = t^6 - 2 \Rightarrow dx = 6t^5dt$$

D'autre part

$$\sqrt[3]{2+x} = (2+x)^{\frac{1}{3}} = (t^6)^{\frac{1}{3}} = t^2 \quad et \quad \sqrt{2+x} = (2+x)^{\frac{1}{2}} = (t^6)^{\frac{1}{2}} = t^3$$

$$F_1(x) = \int \frac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt[3]{2+x}}dx = \int\frac{1}{t^3+t^2}6t^5dt = \int\frac{6t^3}{t+1}dt$$

La division euclidienne de t^3 par $t+1$ donne $t^3 = (t+1)(t^2-t+1) - 1$

$$\begin{aligned}F_1(x) &= 6\int\frac{(t+1)(t^2-t+1)-1}{t+1}dt = 6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt\\
&= 2t^3 - 3t^2 + 6t - \ln|t+1| + K\\
&= 2\sqrt[6]{2+x}^3 - 3\sqrt[6]{2+x}^2 + 6t - \ln\left|\sqrt[6]{2+x}+1\right| + K\\
&= 2\sqrt{2+x} - 3\sqrt[3]{2+x} + 6t - \ln\left|\sqrt[6]{2+x}+1\right| + K\end{aligned}$$

Allez à : Exercice 29

2.

$$\frac{x-1}{2} = \mathrm{th}(u) \Leftrightarrow x = 2\,\mathrm{th}(u) + 1 \Rightarrow dx = 2(1-\mathrm{th}^2(u))du$$

$$F_2(x)=\int\frac{1}{((x-1)^2-4)^2}dx=\int\frac{1}{((2\,\mathrm{th}(u))^2-4)^2}2(1-\mathrm{th}(u))du=\int\frac{2(1-\mathrm{th}^2(u))}{16(\mathrm{th}^2(u)-1)^2}du$$
$$=\frac{1}{8}\int\frac{1-\mathrm{th}^2(u)}{(1-\mathrm{th}^2(u))^2}du=\frac{1}{8}\int\frac{1}{1-\mathrm{th}^2(u)}du=\frac{1}{8}\int \mathrm{ch}^2(u)\,du$$

Car $1-\mathrm{th}^2(u)=1-\frac{\mathrm{sh}^2(u)}{\mathrm{ch}^2(u)}=\frac{\mathrm{ch}^2(u)-\mathrm{sh}^2(u)}{\mathrm{ch}^2(u)}=\frac{1}{\mathrm{ch}^2(u)}$

$$F_2(x)=\frac{1}{8}\int\left(\frac{e^u+e^{-u}}{2}\right)^2du=\frac{1}{32}\int(e^{2u}+2+e^{-2u})du=\frac{1}{32}\left(\frac{e^{2u}}{2}+2u-\frac{e^{-2u}}{2}\right)+K$$

Il reste à remplacer u par sa valeur en fonction de x, soit $u=\mathrm{argth}\left(\frac{x-1}{2}\right)$

Pour $x\in]-1,3[$, $\frac{x-1}{2}\in]-1,1[$ et si on pose $t=\frac{x-1}{2}$

$$u=\mathrm{argth}(t)\ =\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{x-1}{2}}{1-\frac{x-1}{2}}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{3-x}\right)$$

Donc

$$e^{2u}=\frac{x+1}{x-3}\quad et\quad e^{-2u}=\frac{1}{e^{2u}}\ =\frac{3-x}{x+1}$$

Finalement

$$F_2(x)=\frac{1}{64}\times\frac{x+1}{x-3}+\frac{1}{32}\times\ln\left(\frac{x+1}{3-x}\right)-\frac{1}{64}\times\frac{3-x}{x+1}+K$$
$$=\frac{1}{64}\times\frac{(x+1)^2-(3-x)^2}{(3-x)(x+1)}+\frac{1}{32}\times\ln\left(\frac{x+1}{3-x}\right)+K$$
$$=\frac{1}{64}\times\frac{8x-8}{(3-x)(x+1)}+\frac{1}{32}\times\ln\left(\frac{x+1}{3-x}\right)+K$$
$$=\frac{1}{8}\times\frac{x-1}{(3-x)(x+1)}+\frac{1}{32}\times\ln\left(\frac{x+1}{3-x}\right)+K$$

Remarque :

On aurait pu décomposer la fraction rationnelle $\frac{1}{((x-1)^2-4)^2}=\frac{1}{(x-3)^2(x+1)^2}$ en éléments simples.

Allez à : Exercice 29

3. On pose $t=\arcsin(x)\Leftrightarrow x=\sin(t)\Rightarrow dx=\cos(t)\,dt$

$$F_3(x)=\int t^2\cos(t)\,dt$$

A l'aide d'une intégration

$F_3(x)=\int t^2\cos(t)\,dt$	
$u'(t)=\cos(t)$	$u(t)=\sin(t)$
$v(t)=t^2$	$v'(t)=2t$
$F_3(x)=[t^2\sin(t)]-$	$\int 2t\sin(t)\,dt$

$$F_3(x)=t^2\sin(t)-2\int t\sin(t)\,dt$$

A l'aide d'une deuxième intégration par partie

$\int t\sin(t)\,dt$	
$u'(t)=\sin(t)$	$u(t)=-\cos(t)$
$v(t)=t$	$v'(t)=1$
$\int t\sin(t)\,dt=[-t\cos(t)]-$	$\int(-\cos(t))dt$

$$\int t\sin(t)\,dt=[-t\cos(t)]-\int(-\cos(t))dt=-t\cos(t)+\sin(t)+K$$

Donc

$$F_3(x)=t^2\sin(t)-2(-t\cos(t)+\sin(t))+K=(t^2-2)\sin(t)+2t\cos(t)+K$$

$$= ((\arcsin(x))^2 - 2)x + 2\arcsin(x)\cos(\arcsin(x)) + K$$
$$= ((\arcsin(x))^2 - 2)x + 2\arcsin(x)\sqrt{1 - \mathrm{x}^2} + K$$

Allez à : Exercice 29

4.
$$F_4(x) = \int x^2\sqrt{1 + x^3}dx = \frac{1}{3}\int \sqrt{1 + x^3}(3x^2dx)$$

On pose $t = 1 + x^3 \Leftrightarrow dt = 3x^2dx$

$$F_4(x) = \frac{1}{3}\int \sqrt{t}dt = \frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times t^{\frac{3}{2}} + K = \frac{2}{9}(1 + x^3)^{\frac{3}{2}} + K = \frac{2}{9}(1 + x^3)\sqrt{1 + x^3} + K$$

Allez à : Exercice 29

Correction exercice 30.

1. On décompose en éléments simple

$$\frac{2t^2}{t^2 - 1} = 2\frac{t^2 - 1 + 1}{t^2 - 1} = 2 + \frac{2}{t^2 - 1} = 2 + \frac{2}{(t - 1)(t + 1)} = 2 + \frac{1}{t - 1} - \frac{1}{t + 1}$$
$$F(t) = \int \left(2 + \frac{1}{t - 1} - \frac{1}{t + 1}\right)dt = 2t + \ln|t - 1| - \ln|t + 1| + K$$

2.
$$t = \sqrt{e^x + 1} \Leftrightarrow t^2 = e^x + 1 \Leftrightarrow e^x = t^2 - 1 \Leftrightarrow x = \ln(t^2 - 1)$$

Ce qui entraine que

$$dx = \frac{2t}{t^2 - 1}dt$$

Par conséquent

$$G(x) = \int t\times\frac{2t}{t^2 - 1}dt = 2\int \frac{t^2}{t^2 - 1}\,dt = 2t + \ln|t - 1| - \ln|t + 1| + K$$
$$= 2\sqrt{e^x + 1} + \ln\left|\sqrt{e^x + 1} - 1\right| - \ln\left|\sqrt{e^x + 1} + 1\right| + K$$

Allez à : Exercice 30

Correction exercice 31.

1. On pose $t = \sqrt{x - 1} \Leftrightarrow t^2 = x - 1 \Leftrightarrow x = t^2 + 1 \Rightarrow dx = 2tdt$

$$F_1(x) = \int \frac{dx}{x + \sqrt{x - 1}} = \int \frac{2tdt}{t^2 + 1 + t} = 2\int \frac{t}{t^2 + t + 1}dt = 2\int \frac{t}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}dt$$

On pose $u = t + \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = u - \frac{1}{2} \Rightarrow dt = du$

$$F_1(x) = 2\int \frac{u - \frac{1}{2}}{u^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}du = \int \frac{2u}{u^2 + \frac{3}{4}}du + \int \frac{1}{u^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}du$$
$$= \ln\left(u^2 + \frac{3}{4}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right) + K = \ln(t^2 + t + 1) + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t - 1}{\sqrt{3}}\right) + K$$
$$= \ln\left(x - 1 + \sqrt{x - 1} + 1\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\sqrt{x - 1} - 1}{\sqrt{3}}\right) + K$$
$$= \ln\left(x + \sqrt{x - 1}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\sqrt{x - 1} - 1}{\sqrt{3}}\right) + K$$

Allez à : Exercice 31

2.

$$F_2(x)=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}=\int\frac{dx}{x\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}=\int\frac{dx}{x\sqrt{\frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1\right)}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{dx}{x\sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}}$$

On pose $t=\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\sqrt{3}t=2x+1\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{3}t-1}{2}\Rightarrow dx=\frac{\sqrt{3}}{2}dt$

$$F_2(x)=\frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}dt}{\frac{\sqrt{3}t-1}{2}\sqrt{t^2+1}}=2\int\frac{dt}{(\sqrt{3}t-1)\sqrt{t^2+1}}$$

On pose alors $t=\operatorname{sh}(u)\Rightarrow dt=\operatorname{ch}(u)\,du$, donc $\sqrt{\operatorname{sh}^2(u)+1}=\operatorname{ch}(u)$

$$F_2(x)=2\int\frac{\operatorname{ch}(u)\,du}{\left(\sqrt{3}\operatorname{sh}(u)-1\right)\operatorname{ch}(u)}=2\int\frac{du}{\sqrt{3}\operatorname{sh}(u)-1}$$

On pose $v=e^u\Leftrightarrow u=\ln(v)\Rightarrow du=\frac{dv}{v}$

$$F_2(x)=2\int\frac{du}{\sqrt{3}\operatorname{sh}(u)-1}=2\int\frac{du}{\sqrt{3}\frac{(e^u-e^{-u})}{2}-1}=2\int\frac{2e^u}{\sqrt{3}(e^{2u}-1)-2e^u}du$$

$$=2\int\frac{2v}{\sqrt{3}(v^2-1)-2v}\frac{dv}{v}=4\int\frac{dv}{\sqrt{3}v^2-2v-\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}\int\frac{dv}{v^2-\frac{2}{\sqrt{3}}v-1}$$

$v^2-\frac{2}{\sqrt{3}}v-1$ a deux racines réelles : $\Delta=\frac{4}{3}+4=\frac{16}{3}=\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2$

$$v_1=\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{4}{\sqrt{3}}}{2}=\sqrt{3}\quad et\quad v_2=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$v^2-\frac{2}{\sqrt{3}}v-1=\left(v-\sqrt{3}\right)\left(v-\frac{3}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\frac{1}{v^2-\frac{2}{\sqrt{3}}v-1}=\frac{1}{\left(v-\sqrt{3}\right)\left(v-\frac{3}{\sqrt{3}}\right)}=\frac{a}{v-\sqrt{3}}+\frac{b}{v-\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$a=\left[\frac{1}{v-\frac{\sqrt{3}}{3}}\right]_{v=\sqrt{3}}=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$b=\left[\frac{1}{v-\sqrt{3}}\right]_{v=\frac{1}{\sqrt{3}}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$F_2(x)=\frac{4}{\sqrt{3}}\int\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{v-\sqrt{3}}-\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{v-\frac{3}{\sqrt{3}}}\right)dv=2\left(\ln\left|v-\sqrt{3}\right|-\ln\left|v-\frac{\sqrt{3}}{3}\right|\right)+K$$

$$=2\left(\ln\left|e^u-\sqrt{3}\right|-\ln\left|e^u-\frac{3}{\sqrt{3}}\right|\right)+K=2\ln\left|\frac{e^u-\sqrt{3}}{e^u-\frac{\sqrt{3}}{3}}\right|+K$$

Or $t=\operatorname{sh}(u)\Leftrightarrow u=\operatorname{argsh}(t)=\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)$ et $t=\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$

$$u=\operatorname{argsh}(t)=\ln\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\right)=\ln\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{4x^2+4x+4}}{\sqrt{3}}\right)$$

$$=\ln\left(\frac{2\sqrt{x^2+x+1}+2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

Donc

$$e^u=\frac{2\sqrt{x^2+x+1}+2x+1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}e^u-\sqrt{3}=\dfrac{2\sqrt{x^2+x+1}+2x+1}{\sqrt{3}}-\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{x^2+x+1}+2x-2}{\sqrt{3}}\\ e^u-\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{2\sqrt{x^2+x+1}+2x+1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{x^2+x+1}+2x}{\sqrt{3}}\end{cases}$$

Finalement

$$F_2(x)=2\ln\left|\frac{\frac{2\sqrt{x^2+x+1}+2x-2}{\sqrt{3}}}{\frac{2\sqrt{x^2+x+1}+2x}{\sqrt{3}}}\right|+K=2\ln\left|\frac{2\sqrt{x^2+x+1}+2x-2}{2\sqrt{x^2+x+1}+2x}\right|+K$$

Allez à : Exercice 31

3.

$$F_3(x)=\int\frac{x}{\sqrt{9+4x^2}}dx=\int\frac{x}{\sqrt{9\left(1+\left(\frac{2x}{3}\right)^2\right)}}dx$$

On pose $t=\frac{2x}{3}\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}t\Rightarrow dx=\frac{3}{2}dt$

$$F_3(x)=\int\frac{\frac{3}{2}t}{3\sqrt{1+t^2}}\times\frac{3}{2}dt=\frac{3}{4}\int\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}dt=\frac{3}{4}\sqrt{1+t^2}+K=\frac{3}{4}\sqrt{1+\left(\frac{2x}{3}\right)^2}+K$$

$$=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}\sqrt{9+4x^2}+K=\frac{1}{8}\sqrt{9+4x^2}+K$$

Allez à : Exercice 31

4. Sur I, $-4x^2+4x+1>0$

$$F_4(x)=\int\frac{x+1}{\sqrt{-4x^2+4x+1}}dx=\int\frac{x+1}{\sqrt{-4\left(x^2-x-\frac{1}{4}\right)}}dx=\int\frac{x+1}{\sqrt{-4\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\right)}}dx$$

$$=\int\frac{x+1}{\sqrt{3-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}dx=\int\frac{x+1}{\sqrt{3\left(1-\frac{4}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right)}}dx=\int\frac{x+1}{\sqrt{3}\sqrt{1-\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}}dx$$

On pose $t=\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\sqrt{3}t=2x-1\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{3}t+1}{2}\Rightarrow dx=\frac{\sqrt{3}}{2}dt$

$$F_4(x)=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{\frac{\sqrt{3}t+1}{2}+1}{\sqrt{1-t^2}}\frac{\sqrt{3}}{2}dt=\frac{1}{4}\int\frac{\sqrt{3}t+3}{\sqrt{1-t^2}}dt=\frac{\sqrt{3}}{4}\int\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt+\frac{1}{4}\int\frac{3}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{1-t^2}+\frac{3}{4}\arcsin(t)+K=-\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{1-\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}+\frac{3}{4}\arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+K$$

$$=-\frac{1}{4}\sqrt{-4x^2+4x+1}+\frac{3}{4}\arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+K$$

Allez à : Exercice 31

5. Sur I, $-4x^2+12x-5>0$

$$F_5(x)=\int\frac{8x-3}{\sqrt{-4x^2+12x-5}}dx=\int\frac{8x-3}{\sqrt{-4\left(x^2-3x+\frac{5}{4}\right)}}dx=\int\frac{8x-3}{\sqrt{-4\left(\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-1\right)}}dx$$

$$=\int\frac{8x-3}{\sqrt{4-4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}}dx=\int\frac{8x-3}{\sqrt{4\left(1-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\right)}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{8x-3}{\sqrt{1-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}}dx$$

On pose $t=x-\frac{3}{2}\Leftrightarrow x=t+\frac{3}{2}\Rightarrow dx=dt$

$$F_5(x)=\frac{1}{2}\int\frac{8\left(t+\frac{3}{2}\right)-3}{\sqrt{1-t^2}}dt=\int\frac{8t+9}{\sqrt{1-t^2}}dt=8\int\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt+9\int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$=-8\sqrt{1-t^2}+9\arcsin(t)+K=-8\sqrt{1-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}+9\arcsin\left(x-\frac{3}{2}\right)+K$$

$$=-8\sqrt{4\left(-x^2+3x-\frac{5}{4}\right)}+9\arcsin\left(x-\frac{3}{2}\right)+K$$

$$=-8\sqrt{-4x^2+12x-5}+9\arcsin\left(x-\frac{3}{2}\right)+K$$

Allez à : Exercice 31

6. On pose $x=\mathrm{ch}(t)\Rightarrow dx=\mathrm{sh}(t)\,dt$ avec $t\geq 0$, $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{\mathrm{ch}^2(t)-1}=\sqrt{\mathrm{sh}^2(t)}=\mathrm{sh}(t)$

$$F_6(x)=\int\sqrt{x^2-1}dx=\int \operatorname{sh}(t)\operatorname{sh}(t)\,dt=\int \operatorname{sh}^2(t)\,dt=\int\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2dt=\int\frac{e^{2t}-2+e^{-2t}}{4}dt$$
$$=\frac{1}{4}\int(e^{2t}-2+e^{-2t})dt=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}e^{2t}-2t-\frac{1}{2}e^{-2t}\right)+K$$
$$=\frac{1}{16}e^{2\operatorname{argch}(x)}-\frac{1}{4}\operatorname{argch}(t)+\frac{1}{16}e^{-2\operatorname{argch}(x)}+K$$

Mais on peut trouver une forme plus agréable

$$\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}e^{2t}-2t-\frac{1}{2}e^{-2t}\right)=\frac{1}{16}(e^{2t}-e^{-2t})-\frac{1}{4}t=\frac{1}{16}(e^t+e^{-t})(e^t-e^{-t})$$
$$=\frac{1}{16}\times 2\operatorname{ch}(t)\times 2\operatorname{sh}(t)-\frac{1}{4}t=\frac{1}{4}\operatorname{ch}(t)\operatorname{sh}(t)-\frac{1}{4}t=\frac{1}{4}\operatorname{ch}(t)\sqrt{\operatorname{ch}^2(t)-1}-\frac{1}{4}t$$
$$=\frac{1}{4}x\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{4}\operatorname{argch}(x)$$

Donc

$$F_6(x)=\frac{1}{4}x\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{4}\operatorname{argch}(x)+K$$

Allez à : Exercice 31

7. On pose $t=\sqrt{x}\Leftrightarrow x=t^2\Rightarrow dx=2tdt$

$$F_7(x)=\int\frac{x\sqrt{x}}{x^2-5x+4}dx=\int\frac{t^2t}{t^4-5t^2+4}dt=\int\frac{t^3}{t^4-5t^2+4}dt$$
$$t^4-5t^2+4=(t^2-4)(t^2-1)=(t-2)(t+2)(t-1)(t+1)$$
$$\frac{t^3}{t^4-5t^2+4}=\frac{t^3}{(t-2)(t+2)(t-1)(t+1)}=\frac{a}{t-2}+\frac{b}{t+2}+\frac{c}{t-1}+\frac{d}{t+1}$$
$$a=\left[\frac{t^3}{(t+2)(t-1)(t+1)}\right]_{t=2}=\frac{8}{4\times1\times3}=\frac{2}{3}$$
$$b=\left[\frac{t^3}{(t-2)(t-1)(t+1)}\right]_{t=-2}=\frac{-8}{-4\times(-3)\times(-1)}=-\frac{2}{3}$$
$$c=\left[\frac{t^3}{(t-2)(t+2)(t+1)}\right]_{t=1}=\frac{1}{(-1)\times3\times2}=-\frac{1}{6}$$
$$d=\left[\frac{t^3}{(t-2)(t+2)(t-1)}\right]_{t=-1}=\frac{1}{(-3)\times1\times(-2)}=\frac{1}{6}$$
$$\frac{t^3}{t^4-5t^2+4}=\frac{t^3}{(t-2)(t+2)(t-1)(t+1)}=\frac{\frac{2}{3}}{t-2}-\frac{\frac{2}{3}}{t+2}+\frac{\frac{1}{6}}{t-1}-\frac{\frac{1}{6}}{t+1}$$
$$F_7(x)=\int\left(\frac{\frac{2}{3}}{t-2}-\frac{\frac{2}{3}}{t+2}+\frac{\frac{1}{6}}{t-1}-\frac{\frac{1}{6}}{t+1}\right)dt$$
$$=\frac{2}{3}\ln|t-2|-\frac{2}{3}\ln|t+2|+\frac{1}{6}\ln|t-1|-\frac{1}{6}\ln|t+1|+$$
$$=\frac{2}{3}\ln\left(\frac{|t-2|}{|t+2|}\right)+\frac{1}{6}\ln\left(\frac{|t-1|}{|t+1|}\right)+K=\frac{2}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}\right|+\frac{1}{6}\ln\ln\left|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right|+K$$

Allez à : Exercice 31

8. On pose $u=\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$

$$u=\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\Leftrightarrow u^2=\frac{1-t}{1+t}\Leftrightarrow u^2(1+t)=1-t\Leftrightarrow u^2+tu^2=1-t\Leftrightarrow tu^2+t=1-u^2$$
$$\Leftrightarrow t(u^2+1)=1-u^2\Leftrightarrow t=\frac{1-u^2}{u^2+1}$$

Donc

$$dt=\frac{-2u(u^2+1)-2u(1-u^2)}{(u^2+1)^2}=\frac{-4u}{(u^2+1)^2}du$$

D'autre part

$$1-t=1-\frac{1-u^2}{u^2+1}=\frac{u^2+1-(1-u^2)}{u^2+1}=\frac{2u^2}{u^2+1}$$

Par conséquent

$$F_8(t)=\int\frac{1}{1-t}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}dt=\int\frac{1}{\frac{2u^2}{u^2+1}}\times u\times\frac{-4u}{(u^2+1)^2}du=-2\int\frac{du}{u^2+1}=-2\arctan(u)+K$$
$$=-2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\right)+K$$

Allez à : Exercice 31

Correction exercice 32.

On pose

$$t=\sqrt{1-x}\Leftrightarrow t^2=1-x\Leftrightarrow x=1-t^2\Rightarrow dx=-2tdt$$
$$F(x)=\int-\frac{2t}{1+t}dt=-2\int\frac{t}{1+t}dt=-2\int\frac{t+1-1}{t+1}dt=-2\int\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt$$
$$=-2t+2\ln(t+1)+K=-2\sqrt{1-x}+2\ln\left(\sqrt{1-x}+1\right)+K$$

Allez à : Exercice 32

Correction exercice 33.

1. Il existe a, b et c réels tels que

$$\frac{1}{x^2(x-1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x-1}$$

On multiplie par x^2, puis $x=0$

$$b=\left[\frac{1}{x-1}\right]_{x=0}=-1$$

On multiplie par $x-1$, puis $x=1$

$$c=\left[\frac{1}{x^2}\right]_{x=1}=1$$

On multiplie par x, puis $x\to+\infty$

$$0=a+c\Rightarrow a=-1$$

Par conséquent

$$\int\frac{dx}{x^2(x-1)}=\int\left(\frac{-1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x-1}\right)dx=-\ln|x|-\frac{1}{x}+\ln|x-1|+K$$

2.

$$x=\sqrt{\frac{t}{t+1}}\Leftrightarrow x^2=\frac{t}{t+1}\Leftrightarrow x^2(t+1)=t\Leftrightarrow x^2t+x^2=t\Leftrightarrow x^2t-t=-x^2\Leftrightarrow t(x^2-1)=-x^2$$
$$\Leftrightarrow t=\frac{-x^2}{x^2-1}$$

On en déduit que

$$dt=\frac{-2x(x^2-1)-(-x^2)(2x)}{(x^2-1)^2}dx=\frac{-2x^3+2x+2x^3}{(x^2-1)^2}dx=\frac{2x}{(x^2-1)^2}dx$$
$$\frac{1}{t(t+1)\left(\sqrt{\frac{t}{t+1}}-\frac{t}{t+1}\right)}=\frac{1}{\frac{-x^2}{x^2-1}\left(\frac{-x^2}{x^2-1}+1\right)(x-x^2)}=\frac{x^2-1}{-x^2\left(\frac{-x^2+x^2-1}{x^2-1}\right)(x-x^2)}$$
$$=\frac{(x^2-1)^2}{x^2(x-x^2)}=\frac{(x^2-1)^2}{x^3(1-x)}=-\frac{(x^2-1)^2}{x^3(x-1)}$$

Par conséquent

$$G(t)=-\frac{1}{2}\int\frac{(x^2-1)^2}{x^3(x-1)}\frac{2x}{(x^2-1)^2}dx=-\int\frac{1}{x^2(x-1)}dx=-\int\frac{1}{x^2(x-1)}dx$$
$$=\ln|x|+\frac{1}{x}-\ln|x-1|+K=\ln\left|\sqrt{\frac{t}{t+1}}\right|+\sqrt{\frac{t+1}{t}}-\ln\left|\sqrt{\frac{t}{t+1}}-1\right|+K$$

Allez à : Exercice 33

Correction exercice 34.

1.

$F_1(x)=\int_0^x(t^2+1)\arctan(t)\,dt$	
$u'(t)=t^2+1$	$u(t)=\frac{t^3}{3}+t$
$v(t)=\arctan(t)$	$v'(t)=\frac{1}{1+t^2}$
$F_1(x)=\int_0^x(t^2+1)\arctan(t)\,dt=\left[\left(\frac{t^3}{3}+\mathrm{t}\right)\arctan(t)\right]_0^x-$	$\int_0^x\frac{\frac{t^3}{3}+t}{1+t^2}dt$

$$F_1(x)=\int_0^x(t^2+1)\arctan(t)\,dt=\left[\left(\frac{t^3}{3}+t\right)\arctan(t)\right]_0^x-\int_0^x\frac{\frac{t^3}{3}+t}{1+t^2}dt$$
$$=\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\arctan(x)-\frac{1}{3}\int_0^x\frac{t^3+3t}{t^2+1}dt$$

$\frac{t^3+t}{t^2+1}$ est une fraction rationnelle, il faut la décomposer en élément simple, pour cela on commence par faire une division euclidienne

$$\begin{array}{r|l} t^3+3t & t^2+1 \\ \cline{2-2} t^3+t & t \\ \cline{1-1} 2t & \end{array}$$

Donc $t^3+3t=(t^2+1)t+2t$, d'où l'on déduit que

$$\frac{t^3+3t}{t^2+1}=\frac{(t^2+1)t+2t}{t^2+1}=t+\frac{2t}{t^2+1}$$

Par conséquent

$$\int_0^x \frac{t^3+3t}{t^2+1}dt = \int_0^x \left(t + \frac{2t}{t^2+1}\right)dt = \left[\frac{t^2}{2} + \ln(t^2+1)\right]_0^x = \frac{x^2}{2} + \ln(x^2+1)$$

$$F_1(x) = \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\arctan(x) - \frac{x^2}{2} - \ln(x^2+1)$$

Allez à : Exercice 34

2.

$$F_2(x) = \int_0^x (t+1)\arcsin(t)\,dt$$

$\int_0^x (t+1)\arcsin(t)\,dt$	
$u'(t) = t+1$	$u(t) = \frac{t^2}{2} + t$
$v(t) = \arcsin(t)$	$v'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
$\int_0^x (t+1)\arcsin(t)\,dt = \left[\left(\frac{t^2}{2}+t\right)\arcsin(t)\right]_0^x -$	$\int_0^x \frac{\frac{t^2}{2}+t}{\sqrt{1-t^2}}dt$

$$F_2(x) = \int_0^x (t+1)\arcsin(t)\,dt = \left[\left(\frac{t^2}{2}+t\right)\arcsin(t)\right]_0^x - \int_0^x \frac{\frac{t^2}{2}+t}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$= \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\arcsin(x) - \int_0^x \frac{\frac{t^2}{2}+t}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

On fait le changement de variable $t = \sin(u) \Leftrightarrow u = \arcsin(t)$

$$t = 0 \Rightarrow u = \arcsin(0) = 0$$

$$t = x \Rightarrow u = \arcsin(x)$$

$$dt = \cos(u)\,du$$

$$\frac{\frac{t^2}{2}+t}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\frac{\sin^2(u)}{2}+\sin(u)}{\sqrt{1-\sin^2(u)}} = \frac{\frac{\sin^2(u)}{2}+\sin(u)}{\sqrt{\cos^2(u)}} = \frac{\frac{\sin^2(u)}{2}+\sin(u)}{|\cos(u)|}$$

Mais comme $u = \arcsin(t) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(u) > 0$ et alors $|\cos(u)| = \cos(u)$

$$\int_0^x \frac{\frac{t^2}{2}+t}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int_0^{\arcsin(x)} \frac{\frac{\sin^2(u)}{2}+\sin(u)}{\cos(u)}\cos(u)\,du = \int_0^{\arcsin(x)} \left(\frac{\sin^2(u)}{2} + \sin(u)\right)du$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\arcsin(x)} \sin^2(u)\,du + \int_0^{\arcsin(x)} \sin(u)\,du$$

Pour la première intégrale il faut utiliser la formule $\sin^2(u) = \frac{1-\cos(2u)}{2}$

$$\int_0^x \frac{\frac{t^2}{2}+t}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{1}{2}\int_0^{\arcsin(x)} \frac{1-\cos(2u)}{2}du + [-\cos(u)]_0^{\arcsin(x)}$$

$$= \frac{1}{4}\left[u - \frac{1}{2}\sin(2u)\right]_0^{\arcsin(x)} - \cos(\arcsin(x)) + 1$$
$$= \frac{1}{4}\left(\arcsin(x) - \frac{1}{2}\sin(2\arcsin(x))\right) - \cos(\arcsin(x)) + 1$$
$$= \frac{1}{4}\left(\arcsin(x) - \frac{1}{2} \times 2\sin(\arcsin(x))\cos(\arcsin(x))\right) - \sqrt{1-x^2} + 1$$
$$= \frac{1}{4}\arcsin(x) - \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-x^2} + 1$$
$$= \frac{1}{4}\arcsin(x) - \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-x^2} + 1$$

Car

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$$
$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$
$$\arcsin(\sin(x)) = x$$

Finalement

$$F_2(x) = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\arcsin(x) - \frac{1}{4}\arcsin(x) + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2} - 1$$

Allez à : Exercice 34