Equations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Exercice 1.

Résoudre

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 6x + 4 \quad (E)$$

Allez à : Correction exercice 1

Exercice 2.

Résoudre

$$y'' - 3y' = 2 \quad (E)$$

Allez à : Correction exercice 2

Exercice 3.

Résoudre

$$y'' - 3y' + 2y = e^{-x} \quad (E)$$

Allez à : Correction exercice 3

Exercice 4.

Résoudre

$$y'' - 3y' + 2y = 36xe^{-x} \quad (E)$$

Allez à : Correction exercice 4

Exercice 5.

Résoudre

$$y'' - 3y' + 2y = xe^{x}$$

Allez à : Correction exercice 5

Exercice 6.

Résoudre

$$y'' + 2y' + y = 2e^{-x} \quad (E)$$

Allez à : Correction exercice 6

Exercice 7.

Résoudre

$$y'' + 2y' + 5y = 5\cos(2x) - 3\sin(2x) \quad (E)$$

Allez à : Correction exercice 7

Exercice 8.

Résoudre

$$y'' + 2y' + 5y = (4x + 6)\cos(x) + (-2x + 6)\sin(x) \quad (E)$$

Allez à : Correction exercice 8

Exercice 9.

Résoudre

$$y'' + y = \sin(x) \quad (E)$$

Allez à : Correction exercice 9

Exercice 10.

Résoudre

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x}(6\cos(x) - 3\sin(x)) \quad (E)$$

Allez à : Correction exercice 10

Exercice 11.

Résoudre

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x}(2\cos(2x) + 4\sin(2x))$$

Allez à : Correction exercice 11

Exercice 12.

Résoudre

$$y'' - 3y' + 2y = e^{-x} + 6x$$

Allez à : Correction exercice 12

Exercice 13.

Résoudre

$$y'' + 4y = \cos^2(x)$$

Allez à : Correction exercice 13

Exercice 14.

1. Résoudre l'équation

$$y'' + 2y' - 3y = 0$$

2. Résoudre l'équation

$$y'' + 2y' - 3y = (4x + 8)e^{-x}$$

3. Résoudre l'équation

$$y'' + 2y' - 3y = e^{x}$$

Allez à : Correction exercice 14

Exercice 15.

Soit $k \in \mathbb{R}$

1. Selon les valeurs de k résoudre

$$y'' - (1 + k)y' + ky = 0$$

2. Selon les valeurs de k résoudre

$$y'' - (1 + k)y' + ky = e^{2x}$$

Allez à : Correction exercice 15

Exercice 16.

Soit $k \in \mathbb{R}$

1. Selon les valeurs de k résoudre

$$y'' - (1 + k)y' + ky = 0$$

2. Selon les valeurs de k résoudre

$$y'' - (1 + k)y' + ky = e^{2x}$$

Allez à : Correction exercice 16

Exercice 17.

Résoudre sur $\mathbb{R}$

$$y'' + y = \sin(\omega x) \quad (E)$$

Où ω est une constante réelle (on fera attention au cas où $\omega^2 = 1$).

Allez à : Correction exercice 17

CORRECTIONS

Correction exercice 1.

$$y''-3y'+2y=0\ \ (E')$$
$$r^2-3r+2=0\Leftrightarrow r=1\ \text{ ou }\ r=2$$

Donc la solution générale de (E') est $\varphi(x)=\lambda_1e^x+\lambda_2e^{2x}$
On cherche une solution particulière de la forme

$$\varphi_P(x)=Ax^2+Bx+C$$
$$\varphi'_P(x)=2Ax+B$$
$$\varphi''_P(x)=2A$$

On remplace cela dans (E), pour tout $x\in\mathbb{R}$

$$\varphi''_P(x)-3\varphi'_P(x)+2\varphi_P(x)=2x^2-6x+4\Leftrightarrow 2A-3(2Ax+B)+2(Ax^2+Bx+C)=2x^2-6x+4$$
$$\Leftrightarrow 2Ax^2+(-6A+2B)x+2A-3B+2C=2x^2-6x+4\Leftrightarrow\begin{cases}2A=2\\-6A+2B=-6\\2A-3B+2C=4\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}A=1\\-6+2B=-6\\2-3B+2C=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=1\\B=0\\C=1\end{cases}$$

On en déduit que $\varphi_P(x)=x^2+1$
Et la solution générale de (E) est :

$$\varphi(x)=\lambda_1e^x+\lambda_2e^{2x}+x^2+1$$

Allez à : Exercice 1

Correction exercice 2.

$$y''-3y'=0\ \ \ (E')$$

L'équation caractéristique de (E') est : $r^2-3r=0\Leftrightarrow r=0\ \text{ ou }\ r=3$
La solution générale de (E') est :

$$\varphi(x)=\lambda_1+\lambda_2e^{3x}$$

0 est une solution simple de l'équation caractéristique et le degré du polynôme 2 est 0 donc il existe une solution particulière de (E) de la forme

$$\varphi_P(x)=Ax$$
$$\varphi'_P(x)=A\ \ \text{ et }\ \ \varphi''_P(x)=0$$

On remplace cela dans (E)

$$\varphi''_P(x)-3\varphi'_P(x)=2\Leftrightarrow -3A=2\Leftrightarrow A=-\frac{2}{3}$$

Donc

$$\varphi_P(x)=-\frac{2}{3}x$$

Et la solution générale de (E)

$$\varphi(x)=\lambda_1+\lambda_2e^{3x}-\frac{2}{3}x$$

Remarque :
Si on pose $z'=y$ alors (E) devient

$$z'-3z=2$$

Il s'agit d'une équation du premier ordre dont la solution est :

$$\psi(x) = \mu e^{3x} - \frac{2}{3}$$

Il ne reste plus qu’à intégrer cette équation pour retrouver la solution générale ci-dessus.

Allez à : Exercice 2

Correction exercice 3.

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \ \ (E')$$

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \Leftrightarrow r = 1 \ \text{ ou } \ r = 2$$

Donc la solution générale de (E') est $\varphi(x) = \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x}$

Le second membre est le produit d’une constante 1 (donc d’un polynôme de degré 0) par une exponentielle avec $\alpha = -1$, -1 n’est pas solution de l’équation caractéristique de (E') donc (E) admet une solution particulière de la forme

$$\varphi_P(x) = Ae^{-x}$$

$$\varphi_P'(x) = -Ae^{-x} \quad \text{et} \quad \varphi_P''(x) = Ae^{-x}$$

On remplace cela dans (E)

$$\varphi_P''(x) - 3\varphi_P'(x) + 2\varphi_P(x) = e^{-x} \Leftrightarrow Ae^{-x} - 3(-e^{-x}) + 2Ae^{-x} = e^{-x} \Leftrightarrow 6A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{6}$$

Donc

$$\varphi_P(x) = \frac{1}{6}e^{-x}$$

Et la solution générale de (E) est

$$\varphi(x) = \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x} + \frac{1}{6}e^{-x}$$

Allez à : Exercice 3

Correction exercice 4.

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \ \ (E')$$

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \Leftrightarrow r = 1 \ \text{ ou } \ r = 2$$

Donc la solution générale de (E') est $\varphi(x) = \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x}$

Le second membre est le produit d’un polynôme de degré 1 par une exponentielle avec $\alpha = -1$, or -1 n’est pas solution de l’équation caractéristique de (E') donc (E) admet une solution particulière de la forme

$$\varphi_P(x) = (Ax + B)e^{-x}$$

$$\varphi_P'(x) = Ae^{-x} - (Ax + B)e^{-x} = (-Ax + A - B)e^{-x}$$

$$\varphi_P''(x) = -Ae^{-x} - (-Ax + A - B)e^{-x} = (Ax - 2A + B)e^{-x}$$

On remplace cela dans (E)

$$\begin{aligned}&\varphi_P''(x)-3\varphi_P'(x)+2\varphi_P(x)=36xe^{-x}\\&\Leftrightarrow (Ax-2A+B)e^{-x}-3(-Ax+A-B)e^{-x}+2(Ax+B)e^{-x}=36e^{-x}\\&\Leftrightarrow (6Ax-5A+6B)e^{-x}=36xe^{-x}\Leftrightarrow\begin{cases}6A=36\\-5A+6B=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=6\\B=5\end{cases}\end{aligned}$$

Donc

$$\varphi_P(x)=(6x+5)e^{-x}$$

Et la solution générale de (E) est :

$$\varphi(x)=\lambda_1e^x+\lambda_2e^{2x}+(6x+5)e^{-x}$$

Allez à : Exercice 4

Correction exercice 5.

$$y''-3y'+2y=0\ \ (E')$$

$$r^2-3r+2=0\Leftrightarrow r=1\ \text{ ou }\ r=2$$

Donc la solution générale de (E') est $\varphi(x)=\lambda_1e^x+\lambda_2e^{2x}$

Le second membre est le produit d'un polynôme de degré 1 par une exponentielle avec $\alpha=1$, or 1 est solution de l'équation caractéristique de (E') donc (E) admet une solution particulière de la forme

$$\varphi_P(x)=x(Ax+B)e^x=(Ax^2+Bx)e^x$$

$$\varphi_P'(x)=(2Ax+B)e^x+(Ax^2+Bx)e^x=(Ax^2+(2A+B)x+B)e^x$$

$$\begin{aligned}\varphi_P''(x)&=(2Ax+2A+B)e^x+(Ax^2+(2A+B)x+B)e^x\\&=(Ax^2+(4A+B)x+2A+2B)e^x\end{aligned}$$

On remplace cela dans (E)

$$\begin{aligned}&\varphi_P''(x)-3\varphi_P'(x)+2\varphi_P(x)=xe^x\\&\Leftrightarrow (Ax^2+(4A+B)x+2A+2B)e^x-3(Ax^2+(2A+B)x+B)e^x\\&+2(Ax^2+Bx)e^x=xe^x\\&\Leftrightarrow (A-3A+2A)x^2+(4A+B-6A-3B+2B)x+2A+2B-3B=x\\&\Leftrightarrow -2Ax+2A-B=x\Leftrightarrow\begin{cases}-2A=1\\2A-B=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-\frac{1}{2}\\B=-1\end{cases}\end{aligned}$$

Donc

$$\varphi_P(x)=x\left(-\frac{1}{2}x-1\right)e^x=\left(-\frac{1}{2}x^2-x\right)e^x$$

Et la solution générale de (E) est :

$$\varphi(x)=\lambda_1e^x+\lambda_2e^{2x}+\left(-\frac{1}{2}x^2-x\right)e^x=\lambda_2e^{2x}+\left(-\frac{1}{2}x^2-x+\lambda_1\right)e^x$$

Allez à : Exercice 5

Correction exercice 6.

$$y'' + 2y' + y = 0 \ \ (E)$$

$$r^2 + 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow (r+1)^2 = 0 \Leftrightarrow r = -1$$

-1 est une racine double de l'équation caractéristique de (E') donc la solution générale de (E') est :

$$\varphi(x) = (\lambda_1 + \lambda_2 x)e^{-x}$$

Le second membre est le produit d'une constante 2 (donc d'un polynôme de degré 0) par une exponentielle avec $\alpha = -1$, -1 est solution double de l'équation caractéristique de (E') donc (E) admet une solution particulière de la forme

$$\varphi_P(x) = Ax^2e^{-x}$$

$$\varphi_P'(x) = 2Axe^{-x} - Ax^2e^{-x} = A(-x^2 + 2x)e^{-x}$$

$$\varphi_P''(x) = A\big((-2x + 2)e^{-x} - (-x^2 + 2x)e^{-x}\big) = A(x^2 - 4x + 2)e^{-x}$$

On remplace cela dans (E)

$$\varphi_P''(x) + 2\varphi_P'(x) + \varphi_P(x) = 2e^{-x} \Leftrightarrow A(x^2 - 4x + 2)e^{-x} + 2A(-x^2 + 2x)e^{-x} + Ax^2e^{-x} = 2e^{-x} \Leftrightarrow (A - 2A + A)x^2 + (-4A + 4A)x + 2A = 2 \Leftrightarrow A = 1$$

Donc

$$\varphi_P(x) = x^2e^{-x}$$

Et la solution générale de (E) est :

$$\varphi(x) = (\lambda_1 + \lambda_2 x)e^{-x} + x^2e^{-x} = (\lambda_1 + \lambda_2 x + x^2)e^{-x}$$

Allez à : Exercice 6

Correction exercice 7.

$$y'' + 2y' + 5y = 0 \ \ (E')$$

$$r^2 + 2r + 5 = 0 \Leftrightarrow r = -1 + 2i \quad \text{ou} \quad r = -1 - 2i$$

La solution générale de (E') est :

$$\varphi(x) = e^{-x}(\lambda_1 \cos(2x) + \lambda_2 \sin(2x))$$

Ici $\omega = 2$ et $2i$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique, donc (E) admet une solution particulière de la forme

$$\varphi_P(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x)$$

$$\varphi_P'(x) = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x)$$

$$\varphi_P''(x) = -4A\cos(2x) - 4B\sin(2x)$$

On remplace cela dans (E)

$$\begin{aligned}&\varphi_P''(x)+2\varphi_P'(x)+5\varphi_P(x)=5\cos(2x)-3\sin(2x)\\&\Leftrightarrow -4A\cos(2x)-4B\sin(2x)+2(-2A\sin(2x)+2B\cos(2x))\\&+5(A\cos(2x)+B\sin(2x))=5\cos(2x)-3\sin(2x)\\&\Leftrightarrow(-4A+5A+4B)\cos(2x)+(-4B-4A+5B)\sin(2x)\\&=5\cos(2x)-3\sin(2x)\Leftrightarrow\begin{cases}A+4B=5\\-4A+B=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=1\\B=1\end{cases}\end{aligned}$$

Donc $\varphi_P(x)=\cos(2x)+\sin(2x)$

Et la solution générale de (E) est :

$$\varphi(x)=e^{-x}(\lambda_1\cos(2x)+\lambda_2\sin(2x))+\cos(2x)+\sin(2x)$$

Allez à : Exercice 7

Correction exercice 8.

$$y''+2y'+5y=0\quad(E')$$

$$r^2+2r+5=0\Leftrightarrow r=-1+2i\quad\text{ou}\quad r=-1-2i$$

La solution générale de (E') est :

$$\varphi(x)=e^{-x}(\lambda_1\cos(2x)+\lambda_2\sin(2x))$$

Ici $\omega=1$ et i n’est pas une racine de l’équation caractéristique, est un polynôme de degré 1, donc (E) admet une solution particulière de la forme

$$\varphi_P(x)=(Ax+B)\cos(x)+(Cx+D)\sin(x)$$

$$\begin{aligned}\varphi_P'(x)&=A\cos(x)-(Ax+B)\sin(x)+C\sin(x)+(Cx+D)\cos(x)\\&=(Cx+D+A)\cos(x)+(-Ax-B+C)\sin(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_P''(x)&=C\cos(x)-(Cx+D+A)\sin(x)-A\sin(x)+(-Ax-B+C)\cos(x)\\&=(-Ax-B+2C)\cos(x)+(-Cx-D-2A)\sin(x)\end{aligned}$$

On remplace cela dans (E)

$$\begin{aligned}
\varphi_P''(x)+2\varphi_P'(x)+5\varphi_P(x)=(4x+6)\cos(x)+(-2x+6)\sin(x)\\
\Leftrightarrow (-Ax-B+2C)\cos(x)+(-Cx-D-2A)\sin(x)\\
+2\big((Cx+D+A)\cos(x)+(-Ax-B+C)\sin(x)\big)\\
+5\big((Ax+B)\cos(x)+(Cx+D)\sin(x)\big)\\
=(4x+6)\cos(x)+(-2x+6)\sin(x)\\
\Leftrightarrow \big((-A+2C+5A)x-B+2C+2D+2A+5B\big)\cos(x)\\
+\big((-C-2A+5C)x-D-2A-2B+2C+5D\big)\sin(x)\\
=(4x+6)\cos(x)+(-2x+6)\sin(x)\\
\Leftrightarrow \big((4A+2C)x+2A+4B+2C+2D\big)\cos(x)\\
+\big((-2A+4C)x-2A-2B+2C+4D\big)\sin(x)\\
=(4x+6)\cos(x)+(-2x+6)\sin(x)\Leftrightarrow \begin{cases}4A+2C=4\\2A+4B+2C+2D=6\\-2A+4C=-2\\-2A-2B+2C+4D=6\end{cases}\\
\Leftrightarrow \begin{cases}2A+C=2\\A+2B+C+D=3\\-A+2C=-1\\-A-B+C+2D=3\end{cases}
\end{aligned}$$

Résolvons d'abord

$$\begin{matrix}L_1\\L_2\end{matrix}\begin{cases}2A+C=2\\-A+2C=-1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{matrix}L_1\\L_1+2L_2\end{matrix}\begin{cases}2A+C=2\\5C=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=1\\C=0\end{cases}$$

On remet cela dans les deux autres équations

$$\begin{cases}A+2B+C+D=3\\-A-B+C+2D=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1+2B+D=3\\-1-B+2D=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\end{matrix}\begin{cases}2B+D=2\\-B+2D=4\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_1+2L_2\end{matrix}\begin{cases}2B+D=2\\5D=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2B+D=2\\D=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}B=0\\D=2\end{cases}$$

Donc $\varphi_P(x)=x\cos(x)+2\sin(x)$

Et la solution générale de (E) est :

$$\varphi(x)=e^{-x}(\lambda_1\cos(2x)+\lambda_2\sin(2x))+x\cos(x)+2\sin(x)$$

Allez à : Exercice 8

Correction exercice 9.

$$y''+y=0\quad (E')$$

$$r^2+1=0\Leftrightarrow r=-i\quad \text{ou}\quad r=i$$

La solution générale de (E') est $\varphi(x)=\lambda_1\cos(x)+\lambda_2\sin(x)$

$\omega=1$ et $i\omega=i$ est solution de l'équation caractéristique de (E') donc (E) amet une solution particulière de la forme

$$\varphi_P(x)=x(A\cos(x)+B\sin(x))$$

$$\begin{aligned}\varphi_P'(x)&=A\cos(x)+B\sin(x)+x(-A\sin(x)+B\cos(x))\\&=(Bx+A)\cos(x)+(-Ax+B)\sin(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_P''(x)&=B\cos(x)-(Bx+A)\sin(x)-A\sin(x)+(-Ax+B)\cos(x)\\&=(-Ax+2B)\cos(x)+(-Bx-2A)\sin(x)\end{aligned}$$

On remplace cela dans (E)

$$\begin{aligned}&\varphi_P''(x)+\varphi_P(x)=\sin(x)\\&\Leftrightarrow(-Ax+2B)\cos(x)+(-Bx-2A)\sin(x)+x(A\cos(x)+B\sin(x))\\&=\sin(x)\Leftrightarrow 2B\cos(x)-2A\sin(x)=\sin(x)\Leftrightarrow\begin{cases}A=-\dfrac{1}{2}\\B=0\end{cases}\end{aligned}$$

Donc

$$\varphi_P(x)=-\frac{x}{2}\cos(x)$$

Et la solution générale de (E) est

$$\varphi(x)=\lambda_1\cos(x)+\lambda_2\sin(x)-\frac{x}{2}\cos(x)$$

Allez à : Exercice 9

Correction exercice 10.

$$y''+2y'+5y=0\quad(E')$$

$$r^2+2r+5=0\Leftrightarrow r=-1+2i\quad\text{ou}\quad r=-1-2i$$

La solution générale de (E') est :

$$\varphi(x)=e^{-x}(\lambda_1\cos(2x)+\lambda_2\sin(2x))$$

$\alpha=-1$ et $\omega=1$ donc $\alpha+i\omega=-1+i$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique de (E'), donc (E) admet une solution particulière de la forme

$$\varphi_P(x)=e^{-x}(A\cos(x)+B\sin(x))$$

$$\begin{aligned}\varphi_P'(x)&=-e^{-x}(A\cos(x)+B\sin(x))+e^{-x}(-A\sin(x)+B\cos(x))\\&=e^{-x}\big((-A+B)\cos(x)+(-A-B)\sin(x)\big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_P''(x)&\\&=-e^{-x}\big((-A+B)\cos(x)+(-A-B)\sin(x)\big)\\&+e^{-x}(-(-A+B)\sin(x)+(-A-B)\cos(x))\end{aligned}$$

$$=e^{-x}(-2B\cos(x)+2A\sin(x))$$

On remet cela dans (E)

$$\begin{aligned}&\varphi_P''(x)+2\varphi_P'(x)+5\varphi_P(x)=e^{-x}(6\cos(x)-3\sin(x))\\&\Leftrightarrow e^{-x}(-2B\cos(x)+2A\sin(x))\\&+2e^{-x}\big((-A+B)\cos(x)+(-A-B)\sin(x)\big)+5e^{-x}(A\cos(x)+B\sin(x))\\&=e^{-x}(6\cos(x)-3\sin(x))\\&\Leftrightarrow(-2B-2A+2B+5A)\cos(x)+(2A-2A-2B+5B)\sin(x)\\&=6\cos(x)-3\sin(x)\Leftrightarrow 3A\cos(x)+3B\sin(x)=6\cos(x)-3\sin(x)\\&\Leftrightarrow\begin{cases}3A=6\\3B=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=2\\B=-1\end{cases}\end{aligned}$$

Donc

$$\varphi_P(x) = e^{-x}(2\cos(x) - \sin(x))$$

Et la solution générale de (E) est :

$$\varphi(x) = e^{-x}(\lambda_1 \cos(2x) + \lambda_2 \sin(2x)) + e^{-x}(2\cos(x) - \sin(x))$$

Allez à : Exercice 10

Correction exercice 11.

$$y'' + 2y' + 5y = 0 \quad (E')$$

$$r^2 + 2r + 5 = 0 \Leftrightarrow r = -1 + 2i \quad \text{ou} \quad r = -1 - 2i$$

La solution générale de (E') est :

$$\varphi(x) = e^{-x}(\lambda_1 \cos(2x) + \lambda_2 \sin(2x))$$

$\alpha = -1$ et $\omega = 2$ donc $\alpha + i\omega = -1 + 2i$ est une racine de l'équation caractéristique de (E'), donc (E) admet une solution particulière de la forme

$$\varphi_P(x) = xe^{-x}(A\cos(2x) + B\sin(2x))$$

Là, on a un problème, φ_P est un produit de trois termes, la dérivée est la somme de trois termes qui eux-mêmes sont le produit de trois termes, la dérivée la somme de neuf termes qui eux-mêmes sont le produit de trois termes, certes on pourrait arranger φ_P' et φ_P'' en regroupant des termes et en mettant e^{-x} en facteur mais il vaut mieux utiliser l'exponentielle complexe.

$$\begin{aligned}\varphi_P(x) = xe^{-x}(A\cos(2x) + B\sin(2x)) &= xe^{-x}\left(A\frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} + B\frac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{2i}\right)\\
&= x\frac{e^{-x}}{2}\left(e^{2ix}(A - iB) + e^{-2ix}(A + iB)\right) =\\
&= x\frac{1}{2}\left(e^{(-1+2i)x}(A + iB) + e^{(-1-2i)x}(A - iB)\right) = x\frac{1}{2}Re\left(e^{(-1+2i)x}(A + iB)\right)\end{aligned}$$

On pose alors $C = A + iB$

$$\varphi_P(x) = x\frac{1}{2}Re(e^{z_0 x}C)$$

$$\varphi_P'(x) = x\frac{1}{2}Re(z_0 e^{z_0 x}C) + \frac{1}{2}Re(e^{z_0 x}C)$$

$$\begin{aligned}\varphi_P''(x) &= x\frac{1}{2}Re(z_0^2 e^{z_0 x}C) + \frac{1}{2}Re(z_0 e^{z_0 x}C) + \frac{1}{2}Re(z_0 e^{z_0 x}C)\\
&= x\frac{1}{2}Re(z_0^2 e^{z_0 x}C) + \frac{1}{2} \times 2Re(z_0 e^{z_0 x}C)\end{aligned}$$

On remet cela dans (E)

$$\varphi_P''(x)+2\varphi_P'(x)+5\varphi_P(x)=e^{-x}(2\cos(2x)+4\sin(2x))$$
$$\Leftrightarrow x\frac{1}{2}Re(z_0^2e^{z_0x}C)+2\times\frac{1}{2}Re(z_0e^{z_0x}C)$$
$$+2\left(x\frac{1}{2}Re(z_0e^{z_0x}C)+\frac{1}{2}Re(e^{z_0x}C)\right)+5\left(x\frac{1}{2}Re(e^{z_0x}C)\right)$$
$$=e^{-x}(2\cos(2x)+4\sin(2x))$$
$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}Re\big(xz_0^2e^{z_0x}C+2z_0e^{z_0x}C+2\big(xRe(z_0e^{z_0x}C)+Re(e^{z_0x}C)\big)+5xe^{z_0x}C\big)$$
$$=e^{-x}(2\cos(2x)+4\sin(2x))$$
$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}Re(xe^{z_0x}C(z_0^2+2z_0+5)+2z_0e^{z_0x}C+2e^{z_0x}C)$$
$$=e^{-x}(2\cos(2x)+4\sin(2x))$$

Comme $z_0^2+2z_0+5=0$

$$\varphi_P''(x)+2\varphi_P'(x)+5\varphi_P(x)=e^{-x}(2\cos(2x)+4\sin(2x))\Leftrightarrow\frac{1}{2}Re(2z_0e^{z_0x}C+2e^{z_0x}C)$$
$$=e^{-x}(2\cos(2x)+4\sin(2x))\Leftrightarrow\frac{1}{2}Re\big(2e^{z_0x}C(z_0+1)\big)$$
$$=e^{-x}(2\cos(2x)+4\sin(2x))\Leftrightarrow Re\big(e^{z_0x}C(z_0+1)\big)$$
$$=e^{-x}(2\cos(2x)+4\sin(2x))$$

Il reste à calculer la partie réelle de

$$2e^{z_0x}C(z_0+1)=2e^{(-1+2i)x}(A+iB)\big((-1+2i)+1\big)=2e^{-x}e^{2ix}(A+iB)2i$$
$$=4ie^{-x}(\cos(2x)+i\sin(2x))(A+iB)$$
$$=4ie^{-x}\big(A\cos(2x)-B\sin(2x)+i(B\cos(2x)+A\sin(2x))\big)$$
$$=e^{-x}\big(-4B\cos(2x)-4A\sin(2x)+i(4\cos(2x)-4B\sin(2x))\big)$$

Par conséquent

$$\varphi_P''(x)+2\varphi_P'(x)+5\varphi_P(x)=e^{-x}(2\cos(2x)+4\sin(2x))\Leftrightarrow\frac{1}{2}Re\big(e^{z_0x}C(2z_0+1)\big)$$
$$=e^{-x}(2\cos(2x)+4\sin(2x))\Leftrightarrow\frac{1}{2}(-4B\cos(2x)-4A\sin(2x))$$
$$=2\cos(2x)+4\sin(2x)\Leftrightarrow-2B\cos(2x)-2A\sin(2x)$$
$$=2\cos(2x)+4\sin(2x)\Leftrightarrow\begin{cases}-2B=2\\-2A=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}B=-1\\A=-2\end{cases}$$

Donc

$$\varphi_P(x)=xe^{-x}(-2\cos(2x)-\sin(2x))$$

Et la solution générale de (E) est :

$$\varphi_P(x)=e^{-x}(A\cos(2x)+B\sin(2x))+xe^{-x}(-2\cos(2x)-\sin(2x))$$
$$=e^{-x}\big((A-2x)\cos(2x)+(B-x)\sin(2x)\big)$$

Allez à : Exercice 11

Correction exercice 12.

On appelle φ_{P_1} une solution particulière de $y''-3y'+2y=e^{-x}$

On appelle φ_{P_2} une solution particulière de $y'' - 3y' + 2y = 6x$

-1 n'est pas solution de l'équation caractéristique donc il existe une solution particulière de $y'' - 3y' + 2y = e^{-x}$ de la forme

$$\varphi_{P_1}(x) = Ae^{-x}$$

Ce qui entraine que $\varphi'_{P_1}(x) = -Ae^{-x}$ et $\varphi''_{P_1}(x) = Ae^{-x}$ ce que l'on remplace dans l'équation

$$\varphi''_{P_1}(x) - 3\varphi'_{P_1}(x) + 2\varphi_{P_1}(x) = e^{-x} \Leftrightarrow Ae^{-x} - 3(-Ae^{-x}) + 2Ae^{-x} = e^{-x} \Leftrightarrow 6A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{6}$$

$$\varphi_{P_1}(x) = \frac{1}{6}e^{-x}$$

$6x$ est un polynôme de degré 1 donc il existe une solution particulière de $y'' - 3y' + 2y = 6x$ de la forme

$$\varphi_{P_2}(x) = Ax + B$$

Ce qui entraine que $\varphi'_{P_2}(x) = A$ et $\varphi_{P_2}(x) = 0$, ce que l'on remplace dans l'équation

$$\varphi''_{P_2}(x) - 3\varphi'_{P_2}(x) + 2\varphi_{P_2}(x) = 6x \Leftrightarrow 0 - 3A + 2(Ax + B) = 6x \Leftrightarrow 2Ax - 3A + 2B = 6x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2A = 6 \\ -3A + 2B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = \frac{9}{2} \end{cases}$$

$$\varphi_{P_2}(x) = 3x + \frac{9}{2}$$

On solution particulière de $y'' - 3y' + 2y = e^{-x} + 6x$ est

$$\varphi_P(x) = \varphi_{P_1}(x) + \varphi_{P_2}(x) = \frac{1}{6}e^{-x} + 3x + \frac{9}{2}$$

Et la solution générale de $y'' - 3y' + 2y = e^{-x} + 6x$ est

$$\varphi(x) = \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x} + \frac{1}{6}e^{-x} + 3x + \frac{9}{2}$$

Allez à : Exercice 12

Correction exercice 13.

L'équation caractéristique de $y'' + 4y = 0$ est $r^2 + 4 = 0$, ses racines est $r_1 = -2i$ et $r_2 = 2i$, la solution générale de $y'' + 4y = 0$ est

$$\varphi(x) = \lambda_1 \cos(2x) + \lambda_2 \sin(2x)$$

$\cos^2(x)$ n'est pas de la forme $e^{\alpha x}(P(x)\cos(\omega x) + Q(x)\sin(\omega x))$ donc il faut linéariser $\cos^2(x)$, c'est-à-dire $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$

On pose $f_1(x) = \frac{1}{2}$ et $f_2(x) = \frac{1}{2}\cos(2x)$

On appelle φ_{P_1} une solution particulière de $y'' + 4y = \frac{1}{2}$, la théorie veut qu'il existe une solution particulière de la forme $\varphi_{P_1}(x) = A$, mais il est clair que

$$\varphi_{P_1}(x) = \frac{1}{8}$$

Est une solution particulière.

On appelle φ_{P_2} une solution particulière de $y'' + 4y = \frac{1}{2}\cos(2x)$

Ici $\alpha + i\omega = 0 + 2i = 2i$ est solution de l'équation caractéristique de $y'' + 4y = 0$, donc il existe une solution particulière de $y'' + 4y = \frac{1}{2}\cos(2x)$ de la forme

$$\varphi_{P_2}(x) = x(A\cos(2x) + B\sin(2x))$$

Ce qui entraine que

$$\begin{aligned}\varphi'_{P_2}(x) &= A\cos(2x) + B\sin(2x) + x(-2A\sin(2x) + 2B\cos(2x))\\ &= (2Bx + A)\cos(2x) + (-2Ax + B)\sin(2x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{P_2}''(x) &= 2B\cos(2x) - 2(2Bx + A)\sin(2x) - 2A\sin(2x) + 2(-2Ax + B)\cos(2x)\\ &= (-4Ax + 4B)\cos(2x) + (-4Bx - 4A)\sin(2x)\end{aligned}$$

Ce que l'on remplace dans l'équation

$$\begin{aligned}&\varphi''_{P_2}(x) + 4\varphi_{P_2}(x) = \frac{1}{2}\cos(2x)\\ &\Leftrightarrow (-4Ax + 4B)\cos(2x) + (-4Bx - 4A)\sin(2x) + 4x(A\cos(2x) + B\sin(2x))\\ &= \frac{1}{2}\cos(2x) \Leftrightarrow 4B\cos(2x) - 4A\sin(2x) = \frac{1}{2}\cos(2x) \Leftrightarrow \begin{cases} -4A = 0 \\ 4B = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = \frac{1}{8} \end{cases}\end{aligned}$$

Donc $\varphi_{P_2}(x) = \frac{x}{8}\sin(2x)$, par conséquent une solution particulière de $y'' + 4y = \cos^2(x)$ est :

$$\varphi_P(x) = \varphi_{P_1}(x) + \varphi_{P_2}(x) = \frac{1}{8} + \frac{x}{8}\sin(2x)$$

Et la solution générale est :

$$\varphi(x) = \lambda_1\cos(2x) + \lambda_2\sin(2x) + \frac{1}{8} + \frac{x}{8}\sin(2x)$$

Allez à : Exercice 13

Correction exercice 14.

1. L'équation caractéristique est $r^2 + 2r - 3 = 0$, elle admet deux racines réelles distinctes $r = 1$ et $r = -3$, sa solution générale est
$$y = \lambda e^x + \mu e^{-3x}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$
2. Le « -1 » coefficient devant x dans l'exponentielle du second membre n'est pas racine de l'équation caractéristique, donc cette équation admet une solution particulière de la forme
$$y_P = (ax + b)e^{-x}$$
$$y'_P = ae^{-x} - (ax + b)e^{-x} = (-ax + a - b)e^{-x}$$
$$y''_P = -ae^{-x} - (-ax + a - b)e^{-x} = (ax - 2a + b)e^{-x}$$
On remplace dans l'équation avec second membre
$$\begin{aligned}&y''_P + 2y'_P - 3y_P = (4x + 8)e^{-x} \Leftrightarrow (ax - 2a + b)e^{-x} + 2(-ax + a - b)e^{-x} - 3(ax + b)e^{-x}\\ &= (4x + 8)e^{-x} \Leftrightarrow (-4ax - 4b)e^{-x} = (4x + 8)e^{-x} \Leftrightarrow -4ax - 4b = 4x + 8\end{aligned}$$

Donc $a = -1$ et $b = -2$

$$y_P = (-x-2)e^{-x}$$

Et la solution générale est :

$$y = \lambda e^{x} + \mu e^{-3x} + (-x-2)e^{-x}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

3.

Le « 1 » coefficient devant x dans l'exponentielle du second membre est racine de l'équation caractéristique, donc cette équation admet une solution particulière de la forme

$$y_P = axe^{x}$$

$$y_P' = ae^{x} + axe^{x} = (ax+a)e^{x}$$

$$y_P'' = ae^{x} + (ax+a)e^{x} = (ax+2a)e^{x}$$

On remplace dans l'équation avec second membre

$$y_P'' + 2y_P' - 3y_P = e^{x} \Leftrightarrow (ax+2a)e^{x} + 2(ax+a)e^{x} - 3axe^{x} = e^{x} \Leftrightarrow 4ae^{x} = e^{x}$$

Donc $a = \frac{1}{4}$ et $y_P = \frac{1}{4}xe^{x}$

La solution générale est :

$$y = \lambda e^{x} + \mu e^{-3x} + \frac{1}{4}xe^{x}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Allez à : Exercice 14

Correction exercice 15.

1. L'équation caractéristique est $r^2 - (1+k)r + k = 0$, le discriminant vaut

$$\Delta = (1+k)^2 - 4k = 1 + 2k + k^2 - 4k = 1 - 2k + k^2 = (1-k)^2$$

Si $k = 1$ alors il y a une racine réelle double $r_0 = 1$, la solution de l'équation est :

$$y = (\lambda_1 + \lambda_2 x)e^{x}$$

Si $k \neq 1$ alors il y a deux racines réelles distinctes

$$r_1 = \frac{1+k-(1-k)}{2} = k \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{1+k+(1-k)}{2} = 1$$

La solution de l'équation est

$$y = \lambda_1 e^{kx} + \lambda_2 e^{x}$$

2. Si $k \neq 2$, il existe une solution particulière de la forme

$$\varphi_P(x) = Ae^{2x}$$

Donc

$$\varphi_P'(x) = 2Ae^{2x} \quad \text{et} \quad \varphi_P''(x) = 4Ae^{2x}$$

En remplaçant dans l'équation

$$\varphi_P''(x) - (1+k)\varphi_P'(x) + k\varphi_P(x) = e^{2x} \Leftrightarrow 4Ae^{2x} - (1+k)2Ae^{2x} + kAe^{2x} = e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow A(4 - 2(1+k) + k) = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{2-k}$$

Par conséquent

$$\varphi_P(x) = \frac{1}{2-k}e^{2x}$$

Si $k = 1$ la solution générale est

$$y = (\lambda_1 + \lambda_2 x)e^{x} + e^{2x}$$

Si $k \neq 1$ et $k \neq 2$ la solution générale est

$$y = \lambda_1 e^{kx} + \lambda_2 e^{x} + \frac{1}{2-k}e^{2x}$$

Si $k = 2$, il existe une solution particulière de la forme

$$\varphi_P(x) = Axe^{2x}$$

Donc

$$\varphi_P'(x)=2Axe^{2x}+Ae^{2x}=(2Ax+A)e^{2x} \quad \text{et} \quad \varphi_P''(x)=2Ae^{2x}+2(2Ax+A)e^{2x}=(4Ax+4A)e^{2x}$$

Par conséquent

$$\varphi_P''(x)-3\varphi_P'(x)+2\varphi_P(x)=e^{2x}\Leftrightarrow(4Ax+4A)e^{2x}-3(2Ax+A)e^{2x}+2Axe^{2x}=e^{2x}$$
$$\Leftrightarrow 4Ax+4A-3(2Ax+A)+2Ax=1\Leftrightarrow(4A-6A+2A)x+4A-3A=1\Leftrightarrow A=1$$

Dans ce cas la solution générale est

$$y=\lambda_1e^{2x}+\lambda_2e^x+xe^{2x}$$

Allez à : Exercice 15

Correction exercice 16.

1. L'équation caractéristique est $r^2-(1+k)r+k=0$, le discriminant vaut
$$\Delta=(1+k)^2-4k=1+2k+k^2-4k=1-2k+k^2=(1-k)^2$$
Si $k=1$ alors il y a une racine réelle double $r_0=1$, la solution de l'équation est :
$$y=(\lambda_1+\lambda_2x)e^x$$
Si $k\neq1$ alors il y a deux racines réelles distinctes
$$r_1=\frac{1+k-(1-k)}{2}=k \quad \text{et} \quad r_2=\frac{1+k+(1-k)}{2}=1$$
La solution de l'équation est
$$y=\lambda_1e^{kx}+\lambda_2e^x$$
2. Si $k\neq2$, il existe une solution particulière de la forme
$$\varphi_P(x)=Ae^{2x}$$
Donc
$$\varphi_P'(x)=2Ae^{2x} \quad \text{et} \quad \varphi_P''(x)=4Ae^{2x}$$
En remplaçant dans l'équation
$$\varphi_P''(x)-(1+k)\varphi_P'(x)+k\varphi_P(x)=e^{2x}\Leftrightarrow4Ae^{2x}-(1+k)2Ae^{2x}+kAe^{2x}=e^{2x}$$
$$\Leftrightarrow A(4-2(1+k)+k)=1\Leftrightarrow A=\frac{1}{2-k}$$
Par conséquent
$$\varphi_P(x)=\frac{1}{2-k}e^{2x}$$
Si $k=1$ la solution générale est
$$y=(\lambda_1+\lambda_2x)e^x+e^{2x}$$
Si $k\neq1$ et $k\neq2$ la solution générale est
$$y=\lambda_1e^{kx}+\lambda_2e^x+\frac{1}{2-k}e^{2x}$$
Si $k=2$, il existe une solution particulière de la forme
$$\varphi_P(x)=Axe^{2x}$$
Donc
$$\varphi_P'(x)=2Axe^{2x}+Ae^{2x}=(2Ax+A)e^{2x} \quad \text{et} \quad \varphi_P''(x)=2Ae^{2x}+2(2Ax+A)e^{2x}=(4Ax+4A)e^{2x}$$
Par conséquent
$$\varphi_P''(x)-3\varphi_P'(x)+2\varphi_P(x)=e^{2x}\Leftrightarrow(4Ax+4A)e^{2x}-3(2Ax+A)e^{2x}+2Axe^{2x}=e^{2x}$$
$$\Leftrightarrow 4Ax+4A-3(2Ax+A)+2Ax=1\Leftrightarrow(4A-6A+2A)x+4A-3A=1\Leftrightarrow A=1$$
Dans ce cas la solution générale est
$$y=\lambda_1e^{2x}+\lambda_2e^x+xe^{2x}$$

Allez à : Exercice 16

Correction exercice 17.

L'équation homogène est $y'' + y = 0$, son équation caractéristique est $r^2 + 1 = 0$, ses racines sont $r_1 = i$ et $r_2 = -i$, sa solution générale est

$$y = \lambda \cos(x) + \mu \sin(x), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Si $\omega^2 \neq 1$ alors (E) admet une solution particulière de la forme

$$y_P = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$$
$$y_P'' = -A\omega^2\cos(\omega x) - B\omega^2\sin(\omega x)$$

y_P vérifie

$$y_P'' + y_P = \sin(\omega x) \Leftrightarrow -A\omega^2\cos(\omega x) - B\omega^2\sin(\omega x) + A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x) = \sin(\omega x)$$
$$\Leftrightarrow A(1-\omega^2)\cos(\omega x) + B(1-\omega^2)\sin(\omega x) = \sin(\omega x) \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = \dfrac{1}{1-\omega^2} \end{cases}$$

Donc

$$y_P = \frac{1}{1-\omega^2}\sin(\omega x)$$

Et la solution générale de (E) est :

$$y = \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) + \frac{1}{1-\omega^2}\sin(\omega x)$$

Si $\omega = \pm 1$, (E) admet une solution particulière de la forme

$$y_P = x(A\cos(x) + B\sin(x))$$
$$y_P' = A\cos(x) + B\sin(x) + x(-A\sin(x) + B\cos(x))$$
$$y_P'' = -2A\sin(x) + 2B\cos(x) + x(-A\cos(x) - B\sin(x))$$

y_P vérifie

$$y'' + y = \sin(\omega x) \Leftrightarrow -2A\sin(x) + 2B\cos(x) + x(-A\cos(x) - B\sin(x)) + x(A\cos(x) + B\sin(x))$$
$$= \sin(\omega x) \Leftrightarrow -2A\sin(x) + 2B\cos(x) = \omega\sin(x) \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{2\omega} \\ B = 0 \end{cases}$$

Donc $y_P = -\frac{x}{2}\omega\cos(x)$ et la solution générale de (E) est :

$$y = \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) - \frac{x}{2}\omega\cos(x)$$

Autrement dit si $\omega = 1$

$$y = \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) - \frac{x}{2}\cos(x)$$

Et si $\omega = -1$

$$y = \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) + \frac{x}{2}\cos(x)$$

Allez à : Exercice 17