Pascal Lainé

Intégrales généralisées. Suites et séries numériques. Suites et séries de fonctions. Séries entières

Exercices corrigés

Licence STS
L2 *Mathématiques et Économie*
Université Lyon 1

Table des matières

Intégrales Généralisées

Exercice 1.

Montrer la convergence et calculer la valeur des intégrales :

$$I_1=\int_0^{+\infty} t^3e^{-t}dt\,;\;\; I_2=\int_1^{+\infty}\frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}dt\,;\;\; I_3=\int_0^{+\infty}\frac{t\ln(t)}{(t^2+1)^2}dt$$

Allez à : Correction exercice 1

Exercice 2.

Les intégrales généralisées suivantes convergentes ou divergentes ?

$$I_1=\int_2^{+\infty}\ln(t)\,dt\,;\; I_2=\int_0^{2}\ln(t)\,dt\,; I_3=\int_0^{+\infty}e^{-4t}dt\,; I_4=\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt\,; I_5=\int_0^{+\infty}\frac{t^5}{(t^4+1)\sqrt{t}}dt$$

$$I_6=\int_0^{\pi}\ln(\sin(t))\,dt\,; I_7=\int_2^{+\infty}\left(1-\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right)dt\,; I_8=\int_0^{1}\sin\left(\frac{1}{t}\right)dt\,, I_9=\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}\ln\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right)dt$$

Allez à : Correction exercice 2

Exercice 3.

1. Soit F la fonction définie par :

$$F(x)=\int_1^x\frac{\ln(1+t^2)}{t^2}dt$$

Calculer $F(x)$.

2. En déduire que l'intégrale

$$I=\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+t^2)}{t^2}dt$$

Est convergente et déterminer sa valeur.

Allez à : Correction exercice 3

Exercice 4.

1. Calculer

$$F(x)=\int_1^x\frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}dt$$

A l'aide du changement de variable $u=\sqrt{t^2+1}$

2. Montrer avec les règles de Riemann que

$$I=\int_1^{+\infty}\frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}dt$$

Converge.

3. Calculer

$$I=\int_1^{+\infty}\frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}dt$$

Allez à : Correction exercice 4

Exercice 5.

Etudier la convergence des intégrales :

$$I_1=\int_2^{+\infty}\frac{dt}{t(\ln(t))^2}\,; I_2=\int_3^{+\infty}\frac{\arctan(t)}{t^2+2t+7}dt$$

Allez à : Correction exercice 5

Exercice 6.

Etudier la convergence de l'intégrale

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{t^x+t^{2-x}}{t^3+\sqrt{t}}dt$$

Selon les valeurs de $x\in\mathbb{R}$

Allez à : Correction exercice 6

Exercice 7.

Soient a et b deux paramètres réels. Discuter selon leurs valeurs de la convergence de

$$\int_2^{+\infty}\frac{dt}{t^a(\ln(t))^b}$$

On pourra :

a) Lorsque $a\neq 1$, utiliser les règles de Riemann.

b) Lorsque $a=1$, calculer explicitement $\int_2^A\frac{dt}{t(\ln(t))^b}$ pour A réel destiné à tendre vers $+\infty$.

Allez à : Correction exercice 7

Exercice 8.

1. Soit $\alpha>0$. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t^{\alpha+1}}dt$ converge.

   En déduire que $\int_1^{+\infty}\frac{\cos(t)}{t^\alpha}dt$ converge (intégrer par partie).

2. Montrer que $\int_1^{+\infty}\frac{\cos^2(t)}{t}dt$ diverge (linéariser $\sin^2(t)$)

   En déduire que $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|dt$ diverge.

   Vérifier que quand $t\to+\infty$

$$\frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}\sim\frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}+\frac{\cos^2(t)}{t}$$

   Mais que pourtant $\int_1^{+\infty}\frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}dt$ et $\int_0^{+\infty}\left(\frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}+\frac{\cos^2(t)}{t}\right)dt$ ne sont pas de même nature.

Allez à : Correction exercice 8

Exercice 9.

1. Démontrer la convergence de l'intégrale $\int_0^1\frac{x-1}{\ln(x)}dx$.
2. Montrer que, pour tout $x\in\,]0,1[$, $\frac{x-1}{x}\leq\ln(x)<x-1$.
3. Pour $X\in\,]0,1[$, démontrer l'égalité :

$$\int_0^X\frac{xdx}{\ln(x)}=\int_0^{X^2}\frac{dx}{\ln(x)}$$

4. En déduire un encadrement de $\int_0^X\frac{x-1}{\ln(x)}dx$ et montrer que

$$\int_0^1\frac{x-1}{\ln(x)}dx=\ln(2)$$

Allez à : Correction exercice 9

Exercice 10.

Soient f et g deux fonctions continues et strictement positives toutes deux définies sur un même intervalle $[a,b[$ (où b peut-être un réel ou désigner $+\infty$), équivalentes au voisinages de b.

On sait bien sûr que les deux intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature.

Montrer que si ces intégrales convergent, alors $\int_x^b f(t)dt$ et $\int_x^b g(t)dt$ sont équivalentes lorsque x tend vers b par valeurs strictement inférieures.

Allez à : Correction exercice 10

Exercice 11.

Soit $I=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(t)}{t^2+a^2}dt$ avec $a>0$.

Pour tout $\varepsilon>0$ et pour tout $X>0$ on définit : $I_{\varepsilon,X}=\int_\varepsilon^X\frac{\ln(t)}{t^2+a^2}dt$

1. Montrer que I est une intégrale convergente.
2. A l'aide du changement de variable $t=\frac{a^2}{x}$ montrer que :

$$I_{\varepsilon,X}=-\frac{2\ln(a)}{a}\arctan\left(\frac{a}{X}\right)+\frac{2\ln(a)}{a}\arctan\left(\frac{a}{\varepsilon}\right)+\int_{\frac{a^2}{\varepsilon}}^{\frac{a^2}{X}}\frac{\ln(t)}{t^2+a^2}dt$$

3. En faisant tendre ε vers 0 et X vers $+\infty$ dans l'équation ci-dessus et en déduire une relation vérifiée par I, puis la valeur de I.

Allez à : Correction exercice 11

Corrections

Correction exercice 1.

- $$\lim_{t\to+\infty}t^2\times t^3e^{-t}=0$$

  D'après les règles de Riemann $t^\alpha f(t)\to 0$ en $+\infty$ avec $\alpha>1$ montre que I_1 converge.

  On cherche une primitive de $t\to t^3e^{-t}$ de la forme

$$F(t)=(at^3+bt^2+ct+d)e^{-t}$$
$$\begin{aligned}F'(t)&=(3at^2+2bt+c)e^{-t}-(at^3+bt^2+ct+d)e^{-t}\\&=(-at^3+(3a-b)t^2+(2b-c)t+c-d)e^{-t}\end{aligned}$$
$$(-at^3+(3a-b)t^2+(2b-c)t+c-d)e^{-t}=t^3e^{-t}\Leftrightarrow\begin{cases}-a=1\\3a-b=0\\2b-c=0\\c-d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=-3\\c=-6\\d=-6\end{cases}$$
$$\int_0^X t^3e^{-t}dt=[(-t^3-3t^2-6t-6)e^{-t}]_0^X=(-X^3-3X^2-6X-6)e^{-X}+6\to_{X\to+\infty}6$$
$$I_1=6$$

Allez à : Exercice 1

- La fonction est positive

$$\frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}\sim_{+\infty}\frac{1}{t^2}$$

  Il s'agit d'une fonction de Riemann intégrable $\alpha=2>1$

  On fait le changement de variable $u=t^2+1\Leftrightarrow t=\sqrt{u-1}$ dans l'intégrale

$$\int_1^X\frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}dt=\int_1^X\frac{tdt}{t^2\sqrt{t^2+1}}$$

  On retrouve « presque » $du=2tdt$ au numérateur

$$t=1\Rightarrow u=1^2+1=2\qquad\text{et}\qquad t=X\Rightarrow u=X^2+1$$
$$\int_1^X\frac{tdt}{t^2\sqrt{t^2+1}}=\frac{1}{2}\int_2^{X^2+1}\frac{du}{(u-1)\sqrt{u}}$$

  On fait le changement de variable $v=\sqrt{u}\Leftrightarrow u=v^2$, $du=2vdv$

$$u=2\Rightarrow v=\sqrt{2}\qquad et\qquad u=X^2+1\Rightarrow v=\sqrt{X^1+1}$$

$$\frac{1}{2}\int_{2}^{X^2+1}\frac{du}{(u-1)\sqrt{u}}=\frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{X^2+1}}\frac{2vdv}{(v^2-1)v}=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{X^2+1}}\frac{dv}{v^2-1}$$

$$\frac{1}{v^2-1}=\frac{1}{(v-1)(v+1)}=\frac{\frac{1}{2}}{v-1}+\frac{-\frac{1}{2}}{v+1}$$

$$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{X^2+1}}\frac{dv}{v^2-1}=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{X^2+1}}\left(\frac{1}{v-1}-\frac{1}{v+1}\right)dv=[\ln|v-1|-\ln|v+1|]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{X^2+1}}=\left[\ln\left|\frac{v-1}{v+1}\right|\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{X^2+1}}$$

$$=\ln\left|\frac{\sqrt{X^2+1}-1}{\sqrt{X^2+1}+1}\right|-\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|$$

$$\ln\left|\frac{\sqrt{X^2+1}-1}{\sqrt{X^2+1}+1}\right|=\ln\left|\frac{X\left(\sqrt{1+\frac{1}{X^2}}-\frac{1}{X}\right)}{X\left(\sqrt{1+\frac{1}{X^2}}+\frac{1}{X}\right)}\right|=\ln\left|\frac{\sqrt{1+\frac{1}{X^2}}-\frac{1}{X}}{\sqrt{1+\frac{1}{X^2}}+\frac{1}{X}}\right|\to 0$$

$$-\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|=\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)=\ln\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}=2\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$$

Donc $I_2=2\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$

Allez à : Exercice 1

- Il y a deux problèmes, un en 0 et un autre en $+\infty$.

$$\lim_{t\to 0}\frac{t\ln(t)}{(t^2+1)^2}=0$$

Donc la fonction à intégrer est prolongeable par continuité en 0, elle est intégrable

En l'infini

$$\frac{t\ln(t)}{(t^2+1)^2}\sim\frac{\ln(t)}{t^3}$$

$$t^2\times\frac{\ln(t)}{t^3}=\frac{\ln(t)}{t}\to 0$$

D'après les règles de Riemann $t^\alpha f(t)\to_{+\infty}0$ avec $\alpha>1$, la fonction est intégrable. On pose

$$I_3(\epsilon,X)=\int_0^X\frac{t\ln(t)}{(t^2+1)^2}dt$$

Puis on fait une intégration par partie

$\int_\epsilon^X\frac{t\ln(t)}{(t^2+1)^2}dt$	
$u'(t)=\frac{t}{(t^2+1)^2}$	$u(t)=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{t^2+1}$
$v(t)=\ln(t)$	$v'(t)=\frac{1}{t}$
$\int_\epsilon^X\frac{t\ln(t)}{(t^2+1)^2}dt=\left[-\frac{1}{2}\times\frac{1}{t^2+1}\ln(t)\right]_\epsilon^X-$	$\left(-\frac{1}{2}\right)\int_\epsilon^X\frac{1}{t(t^2+1)}dt$

$$\int_\epsilon^X \frac{t\ln(t)}{(t^2+1)^2}dt = \left[-\frac{1}{2}\times\frac{1}{t^2+1}\ln(t)\right]_\epsilon^X + \frac{1}{2}\int_\epsilon^X \frac{1}{t(t^2+1)}dt$$
$$= -\frac{1}{2}\times\frac{1}{X^2+1}\ln(X) + \frac{1}{2}\times\frac{1}{\epsilon^2+1}\ln(\epsilon) + \frac{1}{2}\int_\epsilon^X \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+1}\right)dt$$
$$= -\frac{1}{2}\times\frac{1}{X^2+1}\ln(X) + \frac{1}{2}\times\frac{1}{\epsilon^2+1}\ln(\epsilon) + \frac{1}{2}\left[\ln(t) - \frac{1}{2}\ln(t^2+1)\right]_\epsilon^X$$
$$= -\frac{1}{2}\times\frac{1}{X^2+1}\ln(X) + \frac{1}{2}\times\frac{1}{\epsilon^2+1}\ln(\epsilon)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\ln(X) - \frac{1}{2}\ln(X^2+1) - \ln(\epsilon) - \frac{1}{2}\ln(\epsilon^2+1)\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\times\frac{1}{X^2+1}\ln(X) + \frac{1}{2}\ln(\epsilon)\left(\frac{1}{\epsilon^2+1} - 1\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{X}{\sqrt{X^2+1}}\right) - \frac{1}{4}\ln(\epsilon^2+1)$$
$$= -\frac{1}{2}\times\frac{1}{X^2+1}\ln(X) - \frac{1}{2}\ln(\epsilon)\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{X^2}}}\right) - \frac{1}{4}\ln(\epsilon^2+1)$$

Maintenant il n'y a plus de forme indéterminée compliquée, la limite est nulle

$$I_3 = 0$$

Remarque :

Il existe une bonne ruse pour cette intégrale, sachant que l'intégrale converge on peut faire le changement de variable $t = \frac{1}{u} \Leftrightarrow u = \frac{1}{t}$, $dt = -\frac{du}{u^2}$

$$t = 0^+ \Rightarrow u = +\infty$$
$$t = +\infty \Rightarrow u = 0$$

$$I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{t\ln(t)}{(t^2+1)^2}dt = \int_{+\infty}^0 \frac{\frac{1}{u}\ln\left(\frac{1}{u}\right)}{\left(\frac{1}{u^2}+1\right)^2}\left(-\frac{du}{u^2}\right) = -\int_0^{+\infty} \frac{1}{u}\frac{-\ln(u)}{\left(\frac{1+u^2}{u^2}\right)^2}\left(-\frac{du}{u^2}\right)$$
$$= -\int_0^{+\infty} \frac{1}{u^3}\frac{\ln(u)}{\frac{(1+u^2)^2}{u^4}}du = -\int_0^{+\infty} \frac{u\ln(u)}{(u^2+1)^2}du = -I_3$$

Donc $I_3 = 0$

Allez à : Exercice 1

Correction exercice 2.

- Il y a un problème en $+\infty$, soit on sait qu'une primitive de $\ln$ est $t \to t\ln(t) - t$ et cette primitive tend vers l'infini, soit on applique les règles de Riemann en $+\infty$ avec $\alpha = \frac{1}{2} \leq 1$

$$t^{\frac{1}{2}}\ln(t) \to +\infty$$

I_1 diverge.

Allez à : Exercice 2

- Il y a un problème en 0, soit on sait qu'une primitive de $\ln$ est $t \to t\ln(t) - t$ et cette primitive tend vers une limite finie 0 donc l'intégral converge, soit on applique les règles de Riemann en 0 avec $\alpha = \frac{1}{2} < 1$

$$t^{\frac{1}{2}}\ln(t) \to 0$$

I_2 converge.

Allez à : Exercice 2

-

$$I_3=\int_0^{+\infty} e^{-4t}dt=\left[-\frac{1}{4}e^{-4t}\right]_0^{+\infty}=0+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

I_3 converge.

Allez à : Exercice 2

- Problème en $+\infty$

$$t^2e^{-t^2}\to 0$$

D'après les règles de Riemann $x^\alpha f(x)\to 0$ avec $\alpha>1$ entraine que la fonction est intégrable en $+\infty$

Allez à : Exercice 2

- Il y a un problème en 0 et un en $+\infty$

En $+\infty$

$$\frac{t^5}{(t^4+1)\sqrt{t}}\sim\sqrt{t}=\frac{1}{t^{-\frac{1}{2}}}$$

Il s'agit d'une fonction de Riemann avec $\alpha=-\frac{1}{2}\leq 1$ donc l'intégrale I_5 diverge (ce qui est évident, si on essaye d'intégrer $t\to\sqrt{t}$ on voit clairement le problème en $+\infty$). I_4 diverge.

Du coup il est inutile d'étudier l'intégrabilité en 0 mais cela ne posait pas de problème

$$\frac{t^5}{(t^4+1)\sqrt{t}}\sim\frac{t^5}{\sqrt{t}}=t^{\frac{9}{2}}$$

La fonction est prolongeable par continuité en 0.

Allez à : Exercice 2

- Il y a deux problèmes un en 0 et un autre en π

En 0

$$\ln(sin(t))=\ln\big(t+o(t)\big)=\ln\big(t+o(t)\big)=\ln\big(t\big(1+o(1)\big)=\ln(t)+\ln\big(1+o(1)\big)\sim\ln(t)$$

On applique les règles de Riemann en 0 avec $\alpha=\frac{3}{2}>1$

$$t^{\frac{3}{2}}\ln(t)\to 0$$

L'intégrale converge en 0

En π, on pose $u=\pi-t\to 0$ (c'est mieux que $u=t-\pi$)

$$\ln(\sin(t))=\ln(sin(u-\pi))=\ln(sin(u))$$

Comme précédemment l'intégrale converge.

Finalement l'intégrale I_6 converge.

Allez à : Exercice 2

- Il y a un problème en $+\infty$

$$1-\cos\left(\frac{1}{t}\right)=1-\left(1-\frac{\left(\frac{1}{t}\right)^2}{2!}+o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right)=\frac{1}{2t^2}+o\left(\frac{1}{t^2}\right)\sim\frac{1}{2t^2}$$

Il s'agit d'une fonction de Riemann avec $\alpha=2$ intégrable en $+\infty$. I_7 converge.

Allez à : Exercice 2

- Il y a un problème en 0, mais attention on ne peut pas faire de développement limité de $t\to\sin\left(\frac{1}{t}\right)$ car la variable $\frac{1}{t}$ tend vers l'infini. On pose $I_8(\epsilon)=\int_\epsilon^1\sin\left(\frac{1}{t}\right)dt$, puis on fait le changement de variable $u=\frac{1}{t}\Leftrightarrow t=\frac{1}{u}$, $dt=-\frac{du}{u^2}$. $t=\epsilon\Rightarrow u=\frac{1}{\epsilon}$ et $t=1\Rightarrow u=1$

$$I_8(\epsilon)=\int_\epsilon^1\sin\left(\frac{1}{t}\right)dt=\int_1^{\frac{1}{\epsilon}}\sin(u)\left(-\frac{du}{u^2}\right)=-\int_1^{\frac{1}{\epsilon}}\frac{\sin(u)}{u^2}du$$

$\frac{1}{\epsilon}\to+\infty$ il s'agit de voir si la fonction $u\to\frac{\sin(u)}{u^2}$ est intégrable en $+\infty$

$$\left|\frac{\sin(u)}{u^2}\right| \leq \frac{1}{u^2}$$

Il s'agit d'une fonction de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$ intégrable en $+\infty$ donc la fonction $u \to \frac{\sin(u)}{u^2}$ est absolument intégrable en $+\infty$ donc intégrable et I_8 converge.

Allez à : Exercice 2

- Attention il y a deux problèmes en $\frac{2}{\pi}$ parce que $\cos\left(\frac{2}{\frac{2}{\pi}}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et un autre en $+\infty$

En $\frac{2}{\pi}$ on pose $u = t - \frac{2}{\pi} \Leftrightarrow t = u + \frac{2}{\pi}$

$$\ln\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) = \ln\left(\cos\left(\frac{1}{u+\frac{2}{\pi}}\right)\right) = \ln\left(\cos\left(\frac{1}{\frac{2}{\pi}\left(1+\frac{\pi}{2}u\right)}\right)\right) = \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{1}{1+\frac{\pi}{2}u}\right)\right)$$
$$= \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{\pi}{2}u+o(u)\right)\right)\right) = \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi^2}{4}u+o(u)\right)\right)$$
$$= \ln\left(\sin\left(\frac{\pi^2}{4}u+o(u)\right)\right) = \ln\left(\frac{\pi^2}{4}u+o(u)\right) = \ln\left(\frac{\pi^2}{4}\right) + \ln\big(u+o(u)\big) \sim \ln(u)$$

$$u^{\frac{1}{2}}\ln(u) \to 0$$

Lorsque u tend vers 0, d'après les règles de Riemann si $u^\alpha f(u) \to 0$ avec $\alpha < 1$ alors la fonction est intégrable en 0 donc $t \to \ln\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right)$ est intégrable en $\frac{2}{\pi}$

En $+\infty$

$$\ln\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) = \ln\left(1-\frac{\left(\frac{1}{t}\right)^2}{2!}+o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right) = -\frac{1}{2t^2}+o\left(\frac{1}{t^2}\right) \sim -\frac{1}{2t^2}$$

Il s'agit d'une fonction de Riemann intégrable en $+\infty$ avec $\alpha = 2 > 1$

Allez à : Exercice 2

Correction exercice 3.

1.

$F(x) = \int_1^x \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}dt$

$u'(x) = \frac{1}{t^2}$ $\qquad u(x) = -\frac{1}{t}$

$v(x) = \ln(1+t^2)$ $\qquad v'(x) = \frac{2t}{1+t^2}$

$F(x) = \left[-\frac{1}{t}\ln(1+t^2)\right]_1^x$ $\qquad -\int_1^x \frac{2t}{-t(t^2+1)}dt$

$$F(x) = \left[-\frac{1}{t}\ln(1+t^2)\right]_1^x + 2\int_1^x \frac{1}{1+t^2}dt = -\frac{1}{x}\ln(1+x^2) + \ln(2) + 2\arctan(x) - 2\arctan(1)$$
$$= -\frac{1}{x}\ln(1+x^2) + \ln(2) + 2\arctan(x) - \frac{\pi}{2}$$

2.

$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x}\ln(1+x^2) = 0$$

Et

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

Donc $F(x)$ admet une limite finie, ce qui signifie que I converge et

$$I=\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}dt=\ln(2)+\pi-\frac{\pi}{2}=\ln(2)+\frac{\pi}{2}$$

Allez à : Exercice 3

Correction exercice 4.

1. $u=\sqrt{t^2+1}\Leftrightarrow u^2=t^2+1\Leftrightarrow t^2=u^2-1\Leftrightarrow t=\sqrt{u^2-1}$

   Ce qui entraine que

$$dt=\frac{2udu}{2\sqrt{u^2-1}}=\frac{udu}{\sqrt{u^2-1}}$$
$$t=1\Rightarrow u=\sqrt{2}$$
$$t=X\Rightarrow u=\sqrt{X^2+1}$$
$$F(x)=\int_1^x \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}dt=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{X^2+1}}\frac{1}{\sqrt{u^2-1}u}\frac{udu}{\sqrt{u^2-1}}=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{X^2+1}}\frac{du}{u^2-1}$$

   Il existe a et b deux réels tels que :

$$\frac{1}{u^2-1}=\frac{1}{(u-1)(u+1)}=\frac{a}{u-1}+\frac{b}{u+1}$$

   On multiplie par $u-1$, puis $u=1$

$$a=\left[\frac{1}{u+1}\right]_{u=1}=\frac{1}{2}$$

   On multiplie par $u+1$, puis $u=-1$

$$b=\left[\frac{1}{u-1}\right]_{u=1}=-\frac{1}{2}$$

$$F(x)=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{X^2+1}}\frac{du}{u^2-1}=\frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{X^2+1}}\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)du=\frac{1}{2}[\ln|u-1|-\ln|u+1|]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{X^2+1}}$$
$$=\frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{X^2+1}}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{X^2+1}-1}{\sqrt{X^2+1}+1}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|$$

2. $\frac{3}{2}>1$ et

$$\lim_{t\to+\infty}t^{\frac{3}{2}}\frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}=0$$

   Donc $\frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}$ est intégrable en $+\infty$

3. Première méthode

$$F(x)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{X\left(\sqrt{1+\frac{1}{X^2}}-\frac{1}{X^2}\right)}{X\left(\sqrt{1+\frac{1}{X^2}}+\frac{1}{X^2}\right)}\right|-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+\frac{1}{X^2}}-\frac{1}{X^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{X^2}}+\frac{1}{X^2}}\right|-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)\xrightarrow[X\to+\infty]{}-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)=-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{2-1}\right)$$
$$=-\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$$

   Deuxième méthode, on pose $t=\sqrt{X^2+1}\to+\infty$

$$F(x)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|\xrightarrow[t\to+\infty]{}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|$$

Allez à : Exercice 4

Correction exercice 5.

- Il y a un problème en $+\infty$. Malheureusement les règles de Riemann ne marchent, essayons quand même

Convergence

$$t^{\alpha}\frac{1}{t(\ln(t))^2}=\frac{t^{\alpha-1}}{(\ln(t))^2}\to 0$$

Impose que $\alpha\leq 1$ mais pour utiliser la règle de Riemann concluant à la convergence en $+\infty$ il faut que α soit strictement supérieur à 1

Divergence

$$t^{\alpha}\frac{1}{t(\ln(t))^2}=\frac{t^{\alpha-1}}{(\ln(t))^2}\to +\infty$$

Impose que $\alpha>1$ mais pour utiliser la règle de Riemann concluant à la divergence en $+\infty$ il faut que α soit inférieur ou égal à 1.

Dans ce cas on fait autrement

$$I_1(X)=\int_2^X\frac{dt}{t(\ln(t))^2}=\left[-\frac{1}{\ln(t)}\right]_2^X=-\frac{1}{\ln(X)}+\frac{1}{\ln(2)}\to\frac{1}{\ln(2)}$$

Donc I_1 converge.

Allez à : Exercice 5

- t^2+2t+7 n'est jamais nul

$$\left|\frac{\arctan(t)}{t^2+2t+7}\right|<\frac{\frac{\pi}{2}}{t^2}=\frac{\pi}{2t^2}$$

Il s'agit d'une fonction de Riemann intégrable en $+\infty$ avec $\alpha=2$. Donc I_2 converge.

Allez à : Exercice 5

Correction exercice 6.

Il y a deux problème, un en 0 et un $+\infty$

En 0, $t^3+\sqrt{t}\sim\sqrt{t}$

Si $x\geq 2-x\Leftrightarrow x\geq 1$, alors $t^x+t^{2-x}\sim t^{2-x}$

Donc

$$\frac{t^x+t^{2-x}}{t^3+\sqrt{t}}\sim\frac{t^{2-x}}{\sqrt{t}}=\frac{1}{t^{x-\frac{3}{2}}}$$

Il s'agit d'une fonction de Riemann convergente (en 0) si et seulement si $x-\frac{3}{2}<1\Leftrightarrow x<\frac{5}{2}$

$x\geq 1$ et $x<\frac{5}{2}$. Il y a convergence pour $x\in\left[1,\frac{5}{2}\right[$

Si $x\leq 2-x\Leftrightarrow x\leq 1$, alors $t^x+t^{2-x}\sim t^x$

Donc

$$\frac{t^x+t^{2-x}}{t^3+\sqrt{t}}\sim\frac{t^x}{\sqrt{t}}=\frac{1}{t^{\frac{1}{2}-x}}$$

Il s'agit d'une fonction de Riemann convergente si et seulement si $\frac{1}{2}-x<1\Leftrightarrow x>-\frac{1}{2}$

$x\leq 1$ et $x>-\frac{1}{2}$. Il y a convergence si $n\in\left]-\frac{1}{2},1\right]$

Finalement il y a convergence en 0 si et seulement si $x\in\left]-\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right[$

En $+\infty$, $t^3+\sqrt{t}\sim t^3$

Si $x\leq 2-x\Leftrightarrow x\leq 1$, alors $t^x+t^{2-x}\sim t^{2-x}$

Donc

$$\frac{t^x+t^{2-x}}{t^3+\sqrt{t}}\sim\frac{t^{2-x}}{t^3}=\frac{1}{t^{x+1}}$$

Il s'agit d'une fonction de Riemann convergente (en $+\infty$) si et seulement si $n+1>1 \Leftrightarrow n>0$
$x \leq 1$ et $x>0$. il y a convergence pour $x \in]0,1]$.
Si $x \geq 2-x \Leftrightarrow x \geq 1$, alors $t^x + t^{2-x} \sim t^x$
Donc

$$\frac{t^x+t^{2-x}}{t^3+\sqrt{t}} \sim \frac{t^x}{t^3} = \frac{1}{t^{3-x}}$$

Il s'agit d'une fonction de Riemann convergente (en $+\infty$) si et seulement si $3-x>1 \Leftrightarrow x<2$
$x \geq 1$ et $x<2$. Il y a convergence si $x \in [1,2[$
Finalement il y a convergence en $+\infty$ si et seulement si $x \in]0,2[$
I_3 converge si et seulement si $x \in]0,2[\cap \left]-\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right[=]0,2[$

Allez à : Exercice 6

Correction exercice 7.

a)

Si $a>1$, on choisit $\alpha \in]1,a[$

$$t^\alpha \frac{1}{t^a(\ln(t))^b} = \frac{t^{\alpha-a}}{(\ln(t))^b} \to 0$$

Lorsque $t \to +\infty$
D'après les règles de Riemann l'intégrale converge en $+\infty$ car $\alpha>1$
Si $a<1$, on choisit $\alpha \in]a,1[$

$$t^\alpha \frac{1}{t^a(\ln(t))^b} = \frac{t^{\alpha-a}}{(\ln(t))^b} \to +\infty$$

Lorsque $t \to +\infty$
D'après les règles de Riemann l'intégrale diverge en $+\infty$ car $\alpha<1$

b) Si $b \neq 1$

$$\int \frac{1}{t\,(\ln(t))^b}dt = \int (\ln(t))^{-b} \times \frac{1}{t}dt = \frac{(\ln(t))^{-b+1}}{-b+1} + K$$

Si $-b+1>0 \Leftrightarrow b<1$

$$(\ln(t))^{-b+1} \to +\infty$$

Lorsque $t \to +\infty$ alors l'intégrale diverge
Si $-b+1<0 \Leftrightarrow b>1$

$$(\ln(t))^{-b+1} \to 0$$

Lorsque $t \to +\infty$ alors l'intégrale converge
Si $b=1$

$$\int \frac{dt}{t\ln(t)} = \ln(ln(t)) + K \to +\infty$$

Lorsque $t \to +\infty$ alors l'intégrale diverge.

Allez à : Exercice 7

Correction exercice 8.

1. Il y a un problème en $+\infty$

$$\left|\frac{\sin(t)}{t^{\alpha+1}}\right| \leq \frac{1}{t^{\alpha+1}}$$

Or $\alpha+1>1$, donc il s'agit d'une fonction de Riemann intégrable en $+\infty$, donc $t \to \frac{\sin(t)}{t^{\alpha+1}}$ est absolument intégrable et donc intégrable.

$\int_1^{+X} \frac{\sin(t)}{t^{\alpha+1}} dt$	
$u'(t) = \frac{1}{t^{\alpha+1}} = t^{-\alpha-1}$	$u(t) = \frac{t^{-\alpha}}{-\alpha}$
$v(t) = \sin(t)$	$v'(t) = \cos(t)$
$\int_1^{X} \frac{\sin(t)}{t^{\alpha+1}} dt = \left[\frac{t^{-\alpha}}{-\alpha}\sin(t)\right]_1^X -$	$\int_1^X \left(\frac{t^{-\alpha}}{-\alpha}\right)\cos(t)\,dt$

$$\int_1^X \frac{\sin(t)}{t^{\alpha+1}} dt = \left[\frac{t^{-\alpha}}{-\alpha}\sin(t)\right]_1^X + \frac{1}{\alpha}\int_1^X t^{-\alpha}\cos(t)\,dt = -\frac{\sin(X)}{\alpha X^\alpha} + \frac{\sin(1)}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}\int_1^X \frac{\cos(t)}{t^\alpha} dt$$

Soit encore

$$\int_1^X \frac{\sin(t)}{t^{\alpha+1}} dt = \left[\frac{t^{-\alpha}}{-\alpha}\sin(t)\right]_1^X + \frac{1}{\alpha}\int_1^X t^{-\alpha}\cos(t)\,dt = -\frac{\sin(X)}{\alpha X^\alpha} + \frac{\sin(1)}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}\int_1^X \frac{\cos(t)}{t^\alpha} dt$$

$$\int_1^X \frac{\cos(t)}{t^\alpha} dt = \alpha\int_1^X \frac{\sin(t)}{t^{\alpha+1}} dt + \frac{\sin(X)}{X^\alpha} - \sin(1)$$

Les termes de droites admettent une limite lorsque $X \to +\infty$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^\alpha} dt$ converge.

2.

$$\frac{\cos^2(t)}{t} = \frac{1+\cos(2t)}{2t} = \frac{1}{2t} + \frac{\cos(2t)}{2t}$$

$$\int_1^X \frac{\cos(2t)}{2t} dt = \frac{1}{2}\int_2^{2X} \frac{\cos(u)}{u} du = \frac{1}{2}\int_1^{2X} \frac{\cos(u)}{u} du + \frac{1}{2}\int_2^{1} \frac{\cos(u)}{u} du$$

En faisant le changement de variable $u = 2t$

La première intégrale converge grâce au 1. et la seconde est finie donc $\frac{\cos(2t)}{2t}$ est intégrable en $+\infty$, et comme $\frac{1}{2t}$ n'est pas intégrable en $+\infty$ (fonction de Riemann avec $\alpha = 1$) par conséquent $\frac{\cos^2(t)}{t}$ n'est pas intégrable en $+\infty$ (la somme d'une intégrale divergente et d'une intégrale convergente diverge).

Comme $|\cos(t)| < 1$ on a $\cos^2(t) \le |\cos(t)|$ et donc

$$\frac{\cos^2(t)}{t} \le \frac{|\cos(t)|}{t}$$

La première fonction n'étant pas intégrable en $+\infty$ la seconde ne l'ai pas n'ont plus. Autrement dit $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos(t)}{t}\right| dt$ diverge

$$\frac{\frac{\cos(t)}{\sqrt{t}} + \frac{\cos^2(t)}{t}}{\frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}} = 1 + \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}} \to 1$$

Donc

$$\frac{\cos(t)}{\sqrt{t}} \sim \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}} + \frac{\cos^2(t)}{t}$$

$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}} dt$ converge grâce au 1.

$\frac{\cos(t)}{\sqrt{t}} + \frac{\cos^2(t)}{t}$ est la somme d'une fonction intégrable en $+\infty$ et d'une qui ne l'ai pas donc $\int_1^{+\infty} \left(\frac{\cos(t)}{\sqrt{t}} + \frac{\cos^2(t)}{t}\right) dt$ diverge.

Remarque :

Le résultat qui veut que deux fonctions équivalentes en $+\infty$ soit de même nature nécessite que ces deux fonctions soient de signes constants (positif dans la cours, mais pour négatif cela revient au même) or ces deux fonctions sont parfois positives et parfois négatives.

Allez à : Exercice 8

Correction exercice 9.

1. Il y a deux problème en 0 et en 1

   En 0 :
$$x^{\frac{1}{2}}\frac{x-1}{\ln(x)}\to 0$$
   D'après les règles de Riemann en 0 si $x^{\alpha}f(x)\to 0$ avec $\alpha<0$ alors la fonction est intégrable en 0.

   En 1 on pose $t=1-x\to 0$
$$\frac{x-1}{\ln(x)}=\frac{-t}{\ln(1-t)}=\frac{-t}{-t+o(t)}=\frac{1}{1+o(1)}\to 1$$
   La fonction est prolongeable par continuité en 1 par $f(1)=1$ donc la fonction est intégrable.

2. A l'aide de la formule de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction $f(x)=\ln(x)$ il existe $c\in]x,1[$ tel que
$$f(x)=f(1)+(x-1)f'(c)$$
$$\ln(x)=(x-1)\times\frac{1}{c}$$
$$x<c<1\Leftrightarrow 1<\frac{1}{c}<\frac{1}{x}\Leftrightarrow x-1>\frac{x-1}{c}>\frac{x-1}{x}$$
   Car $x-1<0$, on en déduit que
$$x-1>\ln(x)>\frac{x-1}{x}$$

3. On fait le changement de variable $t=x^2$, $dt=2xdx$, $x=0\Rightarrow t=0$ et $x=X\Rightarrow t=X^2$
$$\int_0^X\frac{xdx}{\ln(x)}=\frac{1}{2}\int_0^{X^2}\frac{dt}{\ln(t^2)}=\frac{1}{2}\int_0^{X^2}\frac{dt}{2\ln(t)}=\int_0^{X^2}\frac{dt}{\ln(t)}=\int_0^{X^2}\frac{dx}{\ln(x)}$$

4.
$$\int_0^X\frac{x-1}{\ln(x)}dx=\int_0^X\frac{x}{\ln(x)}dx-\int_0^X\frac{1}{\ln(x)}dx=\int_0^{X^2}\frac{1}{\ln(x)}dx-\int_0^X\frac{1}{\ln(x)}dx=\int_X^{X^2}\frac{1}{\ln(x)}dx$$
   A partir de
$$\frac{x-1}{x}<\ln(x)<x-1$$
   En divisant par $x-1<0$
$$\frac{1}{x-1}>\frac{1}{\ln(x)}>\frac{x}{x-1}$$
$$\int_X^{X^2}\frac{x}{x-1}dx\le\int_X^{X^2}\frac{1}{\ln(x)}dx\le\int_X^{X^2}\frac{1}{x-1}dx$$
$$\int_X^{X^2}\frac{x}{x-1}dx=\int_X^{X^2}\frac{x-1+1}{x-1}dx=\int_X^{X^2}dx+\int_X^{X^2}\frac{1}{x-1}dx=X^2-X+\ln\left(\frac{X^2-1}{X-1}\right)$$
$$=X(X-1)+\ln(X+1)$$
$$\int_X^{X^2}\frac{1}{x-1}dx=\ln(X+1)$$
   On en déduit que
$$X(X-1)+\ln(X+1)\le\int_X^{X^2}\frac{1}{\ln(x)}dx=\int_0^X\frac{x-1}{\ln(x)}dx\le\ln(X+1)$$
   En faisant tendre X vers 1on trouve que
$$\int_0^1\frac{x-1}{\ln(x)}dx=\ln(2)$$

Allez à : Exercice 9

Correction exercice 10.

On pose

$$F(x)=\int_x^b f(t)dt \qquad \text{et} \qquad G(x)=\int_x^b g(t)dt$$

D'après le théorème des accroissements finis généralisés (pour deux fonctions), entre x et $X>x$, il existe $c\in]x,X[$ tel que

$$\left(F(x)-\lim_{X\to b^-}F(X)\right)G'(c_x)=\left(G(x)-\lim_{X\to b^-}F(X)\right)F'(c_x)$$

On a

$$F'(x)=-f(x) \qquad \text{et} \qquad G'(x)=-g(x)$$

Et

$$\lim_{X\to b^-}F(X)=0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{X\to b^-}F(X)$$

Donc

$$F(x)g(c_x)=G(x)f(c_x)$$

Comme f et g sont équivalentes au voisinage de b, il existe une fonction ϵ tendant vers 0 lorsque $x\to b^-$ tel que

$$\frac{f(x)}{g(x)}=1+\epsilon(x)\Leftrightarrow f(x)=g(x)\big(1+\epsilon(x)\big)$$

Donc

$$F(x)g(c_x)=G(x)g(c_x)\big(1+\epsilon(c_x)\big)$$

g ne peut être identiquement nulle lorsque l'on s'approche de b^- sinon f et g ne peuvent pas être équivalente, bref on simplifie par $g(c_x)$

$$F(x)=G(x)\big(1+\epsilon(c_x)\big)$$

Comme $c\in]x,b^-[$

$$\lim_{x\to b^-}\epsilon(c_x)=0$$

Ce qui montre que $F\sim G$

Allez à : Exercice 10

Remarque :

En 1988 c'est tombé à l'agrégation de mathématiques, il n'y en a pas un sur dix qui a su faire !

Correction exercice 11.

1. En 0. $\frac{\mathrm{Ln}(t)}{t^2+a^2}\sim\frac{\ln(t)}{a^2}$

   $t^{\frac{1}{2}}\frac{\ln(t)}{a^2}\to 0$ et $\frac{1}{2}<1$, d'après les règles de Riemann, l'intégrale $\int_0\frac{\ln(t)}{a^2}dt$ converge.

   $\frac{\ln(t)}{a^2}$ est de signe constant au voisinage de 0 donc l'intégrale $\int_0\frac{\ln(t)}{t^2+a^2}dt$ converge.

   En $+\infty$. $\frac{\mathrm{Ln}(t)}{t^2+a^2}\sim\frac{\ln(t)}{t^2}$

   $t^{\frac{3}{2}}\frac{\ln(t)}{t^2}\to 0$ et $\frac{3}{2}>1$, d'après les règles de Riemann, l'intégrale $\int^{+\infty}\frac{\ln(t)}{t^2}dt$ converge.

   $\frac{\ln(t)}{t^2}$ est de signe constant en $+\infty$ donc $\int^{+\infty}\frac{\ln(t)}{t^2+a^2}dt$.

   Finalement I converge.

2. $dt=-\frac{a^2}{x^2}dx$ et $\frac{\ln(t)}{t^2+a^2}=\frac{\ln\left(\frac{a^2}{x}\right)}{\frac{a^4}{x^2}+a^2}$

3. Si $t=\varepsilon$ alors $x=\frac{a^2}{\varepsilon}$ et si $t=X$ alors $x=\frac{a^2}{X}$

$$I_{\varepsilon,X}=\int_{\varepsilon}^{X}\frac{\ln(t)}{t^2+a^2}dt=\int_{\frac{a^2}{\varepsilon}}^{\frac{a^2}{X}}\frac{\ln\left(\frac{a^2}{x}\right)}{\frac{a^4}{x^2}+a^2}\left(-\frac{a^2}{x^2}\right)dx=\int_{\frac{a^2}{\varepsilon}}^{\frac{a^2}{X}}\frac{\ln(a^2)-\ln(x)}{\left(\frac{a^2}{x^2}+1\right)a^2}\left(-\frac{a^2}{x^2}\right)dx=-\int_{\frac{a^2}{\varepsilon}}^{\frac{a^2}{X}}\frac{2\ln(a)-\ln(x)}{a^2+x^2}dx$$

$$=-2\ln(a)\int_{\frac{a^2}{\varepsilon}}^{\frac{a^2}{X}}\frac{1}{a^2+x^2}dx+\int_{\frac{a^2}{\varepsilon}}^{\frac{a^2}{X}}\frac{\ln(x)}{a^2+x^2}dx=-2\ln(a)\left[\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)\right]_{\frac{a^2}{\varepsilon}}^{\frac{a^2}{X}}+\int_{\frac{a^2}{\varepsilon}}^{\frac{a^2}{X}}\frac{\ln(x)}{a^2+x^2}dx$$

$$=-2\frac{\ln(a)}{a}\arctan\left(\frac{a}{X}\right)+2\frac{\ln(a)}{a}\arctan\left(\frac{a}{\varepsilon}\right)+\int_{\frac{a^2}{\varepsilon}}^{\frac{a^2}{X}}\frac{\ln(x)}{a^2+x^2}dx$$

4. $\mathrm{Lim}_{\varepsilon\to0^+}\frac{a^2}{\varepsilon}=+\infty$ et $\lim_{X\to+\infty}\frac{a^2}{X}=0$ donc $\lim_{\substack{\varepsilon\to0^+\\X\to+\infty}}\int_{\frac{a^2}{\varepsilon}}^{\frac{a^2}{X}}\frac{\ln(x)}{a^2+x^2}dx=\int_{+\infty}^{0}\frac{\ln(x)}{a^2+x^2}dx=-I$

$\lim_{\varepsilon\to0^+}\arctan\left(\frac{a}{\varepsilon}\right)=\frac{\pi}{2}$ et $\lim_{X\to+\infty}\arctan\left(\frac{a}{X}\right)=\arctan(0)=0$

En faisant tendre ε vers 0 et X vers l'infini dans la relation ci-dessous on a :

$$I=\frac{2\times\ln(a)}{a}\frac{\pi}{2}-I$$

D'où

$$I=\frac{\ln(a)}{a}\frac{\pi}{2}$$

Allez à : Exercice 11

Séries numériques

Exercice 1. Etudier la convergence des séries suivantes :

1.
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots$$

2.
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots$$

Allez à : Correction exercice 1

Exercice 2. Etudier la convergence des séries suivantes :

$$S_1 = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n^2}; \qquad S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{n}}; \qquad S_3 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^3}$$

$$S_4 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n; \qquad S_5 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(ne^{\frac{1}{n}} - n\right); \qquad S_6 = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1 + e^{-n})$$

Allez à : Correction exercice 2

Exercice 3. Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

1. $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$
2. $u_n = \frac{1}{n\cos^2(n)}$
3. $u_n = \frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}}$

Allez à : Correction exercice 3

Exercice 4. Déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si } n \text{ est un carré} \\ \dfrac{1}{n^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Allez à : Correction exercice 4

Exercice 5. Les sommes suivantes sont-elles finies ?

$$S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{5^n}; \quad S_2 = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^n; \quad S_3 = \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{2^n}{3^{n-2}}; \quad S_4 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tan^n\left(\frac{\pi}{7}\right)}{3^{n+2}}; \quad S_5 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{9}{(3n+1)(3n+4)}$$

Allez à : Correction exercice 5

Exercice 6. Existence et calcul de :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

Allez à : Correction exercice 6

Exercice 7. Soit (u_n) une suite de réels positifs et $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$

Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Allez à : Correction exercice 7

Exercice 8. Déterminer en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{\ln(n)}{n^\alpha}$$

Allez à : Correction exercice 8

Exercice 9. Etudier la nature de la série de terme général u_n :

1. $u_n = \frac{n+1}{n^3-7}$
2. $u_n = \frac{n+1}{n^2-7}$
3. $u_n = \frac{n+1}{n-7}$
4. $u_n = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$
5. $u_n = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}}$
6. $u_n = \frac{1}{\ln(n^2+2)}$
7. $u_n = \frac{\ln(n)}{n^{\frac{3}{2}}}$
8. $u_n = \frac{n}{2^n}$
9. $u_n = \frac{2^n+3^n}{n^2+\ln(n)+5^n}$
10. $u_n = \frac{1}{n!}$
11. $u_n = \frac{n^{10000}}{n!}$
12. $u_n = \frac{4^{n+1}\left((n+1)!\right)^2}{(2n-1)!}$
13. $u_n = \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$
14. $u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$
15. $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

Allez à : Correction exercice 9

Exercice 10.

Montrer que la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(\sqrt{n}+1)}$ est semi-convergente.

Allez à : Correction exercice 10

Exercice 11. Etudier la convergence de la série numérique de terme général u_n :

1. $u_n = (-1)^n \frac{n^3}{n!}$.
2. $u_n = \frac{a^n}{n!}$, $a \in \mathbb{C}$.
3. $u_n = na^{n-1}$, $a \in \mathbb{C}$.
4. $u_n = \sin\left(\frac{n^2+1}{n}\pi\right)$.
5. $u_n = (-1)^n\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$
6. $u_n = \frac{\sin(n)}{n}$
7. $u_n = n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Allez à : Correction exercice 11

Exercice 12. Calculer

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \qquad \text{avec} \qquad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!\,k!}$$

Allez à : Correction exercice 12

Exercice 13. Calculer

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \qquad \text{avec} \qquad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!\,2^{n-k}}$$

Allez à : Correction exercice 13

Exercice 14. Etudier la nature des séries de terme général et calculer leur somme :

1. $u_n = \frac{1}{n(n+1)}, \quad n \geq 1$
2. $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}, \quad n \geq 1$
3. $u_n = \frac{2n-1}{n(n^2-4)}, \quad n \geq 3$
4. $u_n = (-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right), \quad n \geq 2$
5. $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{(n+2)^2}\right), \quad n \geq 1$

Allez à : Correction exercice 14

Exercice 15.

Si $(v_n)_{n\geq 0}$ est une suite numérique tendant vers 0 et si a, b, c sont trois réels vérifiant $a + b + c = 0$, on pose pour tout $n \geq 0$:

$$u_n = av_n + bv_{n+1} + cv_{n+2}$$

Montrer que la suite de terme général u_n converge et calculer sa somme.

Allez à : Correction exercice 15

Exercice 16. Etudier la convergence des séries de terme général :

1. $u_n = \sin\left(\pi \frac{n^3+1}{n^2+1}\right)$
2. $u_n = \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) (\ln(n))^{2011}$
3. $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \sqrt{\sin(x)}\, dx$
4. $u_n = \frac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{1+n}$
5. $u_n = \frac{1}{(\ln(n))^n}$
6. $u_n = \frac{2^n}{n^2}(\sin(\alpha))^{2n}$

Allez à : Correction exercice 16

Exercice 17.

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_n = n! \prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{a}{k}\right), \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \pi\mathbb{N}$$

1. On suppose que $a \neq 1$. En étudiant la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ préciser

a) La nature de la série $\sum u_n$.

b) La nature de la suite (u_n).

2.

a) Si $a_n = \ln\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$, quelle est la nature de la série $\sum a_n$?

b) Quelle est la nature de la suite (u_n) pour $a = 1$.

Allez à : Correction exercice 17

Exercice 18.

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{n} e^{-u_n}$ pour tout $n \geq 1$.

1. Nature de la série $\sum u_n$?
2. Nature de la série $\sum (-1)^n u_n$?

Allez à : Correction exercice 18

Exercice 19.

Montrer que la suite $u_n = \frac{e^n n!}{n^{n+\frac{1}{2}}}$ converge, on pourra d'abord montrer que la série de terme général

$$z_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$$

est convergente.

Allez à : Correction exercice 19

Exercice 20.

Nature de la série de terme général (convergence et absolue convergence).

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$

Où

$$u_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$$

Allez à : Correction exercice 20

Exercice 21.

Montrer que les séries de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$$

Ne sont pas de mêmes natures et que pourtant $u_n \sim v_n$.

Allez à : Correction exercice 21

Exercice 22. On pose

$$f(n) = \int_0^1 x^n e^{-x} dx, \quad n \in \mathbb{N}$$

1. Montrer que la suite $f(n)$ est positive et décroissante. Au moyen d'une intégration par parties donner une relation de récurrence entre $f(n)$ et $f(n-1)$.
   Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$
   $$f(n) = \frac{n!}{e}\left(e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)$$
2. Montrer que l'on a :

$$\frac{1}{e(n+1)} \leq f(n) \leq \frac{1}{n+1}$$

En déduire la nature des séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\,; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f(n)$$

3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) x^n$$

Exercice 23. On considère la série numérique de terme général u_n pour $n \geq 1$ et $a \in \mathbb{R}$:

$$u_n = \left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^a}$$

1. Montrer que si cette série est convergente pour une valeur a donnée, elle converge pour tout $b \geq a$.
2. Montrer que si $a \leq 2$ la série est divergente.

On pourra utiliser un développement limité de $\ln(u_n)$.

3. On pose $a = 2 + \epsilon$ avec $0 < \epsilon < 1$

   Montrer que u_n est équivalent à $\exp\left(-\frac{1}{6} n^{\epsilon}\right)$. En déduire que la série est alors convergente.
4. Donner toutes les valeurs de a pour lesquelles cette série converge.

Allez à : Exercice 23

Exercice 24.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

1.
   a) Calculer u_0.
   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{2n+1}$$

2.
   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$u_n + u_{n+1} = \frac{1}{2n+1}$$

   b) En déduire que :

$$\sum_{k=0}^{n} v_k = \frac{\pi}{4} + (-1)^n u_{n+1}$$

   c) Montrer que la série de terme général v_n converge et calculer sa somme.

Allez à : Exercice 24

Corrections

Correction exercice 1.

1.

   Il s'agit d'une série de Riemann divergente avec $\alpha = 1 \leq 1$

2.

$$\frac{1}{2k+1} \sim \frac{1}{2k}$$

Il s'agit d'une série de Riemann divergente avec $\alpha = 1 \leq 1$

Allez à : Exercice 1

Correction exercice 2.

$\frac{n^2+1}{n^2} \to 1 \neq 0$ donc la série ne converge pas

$\frac{2}{\sqrt{n}} = \frac{2}{n^{\frac{1}{2}}}$ il s'agit du terme général d'une série de Riemann divergente avec $\alpha = \frac{1}{2} \leq 1$

$$\frac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^3} \sim \frac{2^4}{7^3} \times \frac{1}{n^2}$$

Il s'agit du terme général d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 2 > 1$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-1+o(1)} \to \frac{1}{e} \neq 0$$

La série diverge.

$$ne^{\frac{1}{n}} - n = n\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) = n\left(1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)-1\right) = 1+o(1) \to 1 \neq 0$$

La série diverge.

$$\ln(1+e^{-n}) \sim e^{-n} = \left(\frac{1}{e}\right)^n$$

Il s'agit d'une suite géométrique de raison dans $]-1,1[$.

Allez à : Exercice 2

Correction exercice 3.

1.

$$u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} = e^{n^2\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)} = e^{-n^2\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} = e^{-n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{-n^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = e^{-n+1+o(1)}$$
$$= e^{-n}e^{1+o(1)} \sim e^{-n} \times e = e\left(\frac{1}{e}\right)^n$$

Il s'agit d'une suite géométrique de raison dans $]-1,1[$, la série converge.

2.

$$u_n = \frac{1}{n\cos^2(n)} > \frac{1}{n}$$

Il s'agit d'une série à termes positifs supérieurs à $\frac{1}{n}$, qui est le terme général d'une série de Riemann divergente avec $\alpha = 1 \leq 1$. La série diverge.

3.

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{\ln(n)} \to 0$$

D'après la règle de Cauchy, $0 < 1$, la série converge.

Allez à : Exercice 3

Correction exercice 4.

$$\sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{n=p^2}^{N} u_n + \sum_{n\neq p^2}^{N} u_n > \sum_{n=p^2}^{N} u_n = \sum_{n=p^2}^{N} \frac{1}{p}$$

Cette dernière série diverge (Riemann avec $\alpha = 1 \leq 1$ donc la série de terme général u_n diverge.

Expliquons quand même un peu

$$\sum_{n=1}^{N} u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{10^2} + \cdots$$

Ainsi, il est plus clair que tous les « $\frac{1}{n}$ » sont dans la série et que donc la série diverge.

Allez à : Exercice 4

Correction exercice 5.

- $\frac{1}{5^n} = \left(\frac{1}{5}\right)^n$ est le terme général d'une série géométrique de raison dans $]-1,1[$, la série converge.
- $\left(\frac{-1}{3}\right)^n$ est le terme général d'une série géométrique de raison dans $]-1,1[$, la série converge.
- $\frac{2^n}{3^{n-2}} = 4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$ est le terme général d'une série géométrique de raison dans $]-1,1[$, la série converge.
- $\left|\frac{\tan^n\left(\frac{\pi}{7}\right)}{3^{n+2}}\right| \leq \frac{1}{3^{n+2}} = \frac{1}{9} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$ est le terme général d'une série géométrique de raison dans $]-1,1[$, la série converge.
- $\frac{9}{(3n+1)(3n+4)} \sim \frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 2 > 1$.

Allez à : Exercice 5

Correction exercice 6.

$\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ est de signe constant (négatif) et

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{n^2}$$

Est le terme général d'une série d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 2 > 1$.

Allez à : Exercice 6

Correction exercice 7.

Si la série de terme général u_n converge, alors $u_n \to 0$ donc $v_n \sim u_n$ comme ce sont des séries à termes positifs, la série de terme général v_n converge, si elle diverge alors la série de terme général v_n diverge, bref, les deux séries sont de mêmes natures.

Réciproquement

$$v_n = \frac{u_n}{1 + u_n} \Leftrightarrow v_n(1 + u_n) = u_n \Leftrightarrow v_n + u_n v_n = u_n \Leftrightarrow v_n = u_n(1 - v_n) \Leftrightarrow u_n = \frac{v_n}{1 - v_n}$$

On a encore $u_n \sim v_n$ donc les série sont de mêmes natures.

Allez à : Exercice 7

Correction exercice 8.

Si $\alpha > 1$, alors on utilise la règle de Riemann avec $\beta \in]\alpha, 1[$

$$n^\beta \frac{\ln(n)}{n^\alpha} = \frac{\ln(n)}{n^{\alpha-\beta}} \to 0 < 1$$

Lorsque $n \to +\infty$. Cela montre que la série de terme général $\frac{\ln(n)}{n^\alpha}$ converge car $\beta < 1$

Si $\alpha < 1$, alors on utilise la règle de Riemann avec $\beta \in]1, \alpha[$

$$n^\beta \frac{\ln(n)}{n^\alpha} = n^{\alpha-\beta} \ln(n) \to +\infty$$

Lorsque $n \to +\infty$. Cela montre que la série de terme général $\frac{\ln(n)}{n^\alpha}$ diverge car $\beta > 1$

Lorsque $\alpha = 1$, c'est plus compliqué, les règles de Riemann ne marche pas. Il s'agit d'une série à termes positifs, on peut appliquer la comparaison à une intégrale

$$x \to \frac{1}{x\ln(x)}$$

Est intégrable car

$$\int_2^X \frac{1}{x\ln(x)}dx = [\ln(\ln(x)]_2^X = \ln(\ln(X)) - \ln(\ln(2))) \to +\infty$$

Lorsque X tend vers l'infini, ce qui montre que l'intégrale est divergente, la fonction $x \to \frac{1}{x\ln(\mathrm{x})}$ est clairement décroissante et tend vers 0 en l'infini, donc la série de terme général $\frac{1}{n\ln(n)}$ diverge.

Allez à : Exercice 8

Remarque :

C'est ce que l'on appelle la règle de Duhamel.

Correction exercice 9.

1. La suite (u_n) est de signe constant

$$u_n \sim \frac{1}{n^2}$$

C'est le terme général d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 2 > 1$

Allez à : Exercice 9

2. La suite (u_n) est de signe constant

$$u_n \sim \frac{1}{n}$$

C'est le terme général d'une série de Riemann divergente avec $\alpha = 1 \leq 1$

Allez à : Exercice 9

3. $u_n \to 1 \neq 0$ la série diverge grossièrement

Allez à : Exercice 9

4. La suite (u_n) est de signe constant

$$u_n \sim \frac{1}{n^2}$$

C'est le terme général d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 2 > 1$

Allez à : Exercice 9

5. Méfiance

$$u_n = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}} = \frac{1}{n}n^{-\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{n}e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}\ln(n)}$$

Comme

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} = 0$$

On a

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}\ln(n)} = 1$$

Ce qui montre que

$$u_n \sim \frac{1}{n}$$

C'est le terme général d'une série de Riemann divergente avec $\alpha = 1 \leq 1$

Allez à : Exercice 9

6. u_n est de signe constant

$$u_n = \frac{1}{\ln(n^2+2)} = \frac{1}{\ln\left(n^2\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\right)} = \frac{1}{2\ln(n) + \ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right)} = \frac{1}{2\ln(n) + \frac{2}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\mathrm{n}^2}\right)}$$

$$n^{\frac{1}{2}}u_n = n^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2\ln(n) + \frac{2}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\mathrm{n}^2}\right)} \to +\infty$$

D'après les règles de Riemann $n^\alpha u_n \to +\infty$ avec $\alpha < 1$ entraine que la série de terme général u_n diverge.

Allez à : Exercice 9

7. u_n est de signe constant

$$n^{\frac{5}{4}}u_n = n^{\frac{5}{4}}\frac{\ln(n)}{n^{\frac{3}{2}}} = \frac{\ln(n)}{n^{\frac{1}{4}}} \to 0$$

D'après les règles de Riemann $n^\alpha u_n \to +\infty$ avec $\alpha > 1$ entraine que la série de terme général u_n converge.

Allez à : Exercice 9

8. u_n est de signe constant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{n+1}{n} \times \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} < 1$$

D'après la règle de D'Alembert la série de terme général u_n converge.

Allez à : Exercice 9

9. u_n est de signe constant

$$u_n = \frac{2^n + 3^n}{n^2 + \ln(n) + 5^n} \sim \frac{3^n}{5^n} = \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

$\left(\frac{3}{5}\right)^n$ est le terme général d'une série géométrique convergente, la série de terme général u_n converge.

Allez à : Exercice 9

10. u_n est de signe constant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{n+1} \to 0 < 0$$

D'après la Règle de D'Alembert la série de terme général u_n converge.

Allez à : Exercice 9

11. u_n est de signe constant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)^{10000}}{(n+1)!}}{\frac{n^{10000}}{n!}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{10000}\frac{n!}{(n+1)!} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{10000} \times \frac{1}{n+1} \to 0 < 1$$

D'après la Règle de D'Alembert la série de terme général u_n converge.

Allez à : Exercice 9

12. u_n est de signe constant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{4^{n+2}\left((n+2)!\right)^2}{(2n+1)!}}{\frac{4^{n+1}\left((n+1)!\right)^2}{(2n-1)!}} = \frac{4^{n+2}\left((n+2)!\right)^2(2n-1)!}{4^{n+1}\left((n+1)!\right)^2(2n+1)!} = 4\frac{((n+2)^2\left((n+1)!\right)^2(2n-1)!}{\left((n+1)!\right)^2(2n+1)2n(2n-1)!}$$

$$= 4\frac{(n+2)^2}{(2n+1)2n} \sim 1$$

Cà ce n'est pas de chance, sauf si on peut montrer que la limite est 1 par valeur supérieure

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 4\frac{(n+2)^2}{(2n+1)2n} = \frac{4(n^2+4n+4)}{4n^2+2n} = \frac{4n^2+16n+16}{4n^2+2n} > 1$$

Ouf ! La limite est 1^+ donc la série de terme général diverge.

Allez à : Exercice 9

13. u_n est de signe constant

$$u_n=\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n=e^{n\sin\left(\frac{1}{n}\right)}=e^{n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)}=e^{1-\frac{1}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}\to\frac{1}{e}\neq 0$$

La série de terme général u_n diverge grossièrement

Remarque : il était inutile de faire un développement limité à l'ordre 3 de $\sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

Allez à : Exercice 9

14. u_n est de signe constant

$$u_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}=e^{n^2\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}=e^{n^2\left(-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}=e^{-n-\frac{1}{2}+o(1)}=e^{-n}e^{-\frac{1}{2}+o(1)}\sim\frac{1}{\sqrt{e}}\left(\frac{1}{e}\right)^n$$

$\frac{1}{\sqrt{e}}\left(\frac{1}{e}\right)^n$ est le terme général d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{e}$ strictement inférieure à 1. La série de terme général u_n converge.

Allez à : Exercice 9

15.

$$u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}>1$$

Donc u_n ne peut pas tendre vers 0.

Allez à : Exercice 9

Correction exercice 10.

On pose

$$f(x)=\frac{1}{\ln\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$f'(x)=-\frac{\left(\ln\left(\sqrt{x}+1\right)\right)'}{\left(\ln\left(\sqrt{x}+1\right)\right)^2}=-\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\times\frac{1}{\ln\left(\sqrt{x}+1\right)}}{\left(\ln\left(\sqrt{x}+1\right)\right)^2}<0$$

Donc la suite de terme général $u_n=f(n)$ est décroissante, elle tend vers 0, d'après le TSSA la série converge.

$$|u_n|=\frac{1}{\ln\left(\sqrt{n}+1\right)}$$

$$n^{\frac{1}{2}}|u_n|=\frac{n^{\frac{1}{2}}}{\ln\left(\sqrt{n}+1\right)}\to+\infty$$

D'après les règles de Riemann si $n^\alpha|u_n|\to+\infty$ avec $\alpha>1$ la série de terme général $|u_n|$ diverge ce qui montre que la série de terme général ne converge pas absolument. Cette série est donc semi-convergente.

Allez à : Exercice 10

Correction exercice 11.

1. On pose $v_n=|u_n|=\frac{n^3}{n!}$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{\frac{(n+1)^3}{(n+1)!}}{\frac{n^3}{n!}}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^3\times\frac{1}{n+1}\to 0$$

D'Après la règle de D'Alembert, la série de terme général v_n converge, donc la série de terme général u_n converge absolument, donc elle converge.

2. On pose $v_n=|u_n|=\frac{|a|^n}{n!}$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|a|^n}{n!}} = \frac{|a|}{n+1} \to 0$$

D'après la règle de D'Alembert, la série de terme général v_n converge, donc la série de terme général u_n converge absolument, donc elle converge.

3. On pose $v_n = |u_n| = n|a|^{n-1}$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+1)|a|^n}{n|a|^{n-1}} = \frac{n}{n+1}|a| \to |a|$$

Si $|a| < 1$

D'après la règle de D'Alembert, la série de terme général v_n converge, donc la série de terme général u_n converge absolument, donc elle converge.

Si $|a| \geq 1$, $|u_n| \to +\infty$ donc la série diverge grossièrement

4.

$$u_n = \sin\left(\frac{n^2+1}{n}\pi\right) = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{n}\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Il s'agit d'une série alternée car $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \geq 0$, il est à peu près évident que a_n est décroissant et tend vers 0, d'après le TSSA, la série converge.

Remarque : on pourrait montrer qu'elle semi-convergente.

5.

$$u_n = (-1)^n\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = (-1)^n \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ est positif, décroissant et tend vers 0, d'après le TSSA la série converge.

6. On pose

$$V_N = \sum_{n=0}^{N} \sin(n) = \sum_{n=0}^{N} \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{in}\right) = \mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{N} \mathrm{e}^{in}\right)$$

Normalement il faudrait prendre la somme à partir de $n = 1$car u_0 n'est pas défini, mais cela ne change rien au fond.

$$\sum_{n=0}^{N} \mathrm{e}^{in} = \sum_{n=0}^{N} \left(\mathrm{e}^{i}\right)^n = \frac{1 - e^{i(N+1)}}{1 - e^{ir}} = \frac{e^{\frac{i(N+1)}{2}}\left(e^{-\frac{i(N+1)}{2}} - e^{\frac{i(N+1)}{2}}\right)}{e^{\frac{i}{2}}\left(e^{-\frac{i}{2}} - e^{\frac{i}{2}}\right)} = e^{\frac{iN}{2}} \times \frac{-2i\sin\left(\frac{N+1}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$= e^{\frac{iN}{2}} \times \frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}$$

Donc

$$\left|\sum_{n=0}^{N} \mathrm{e}^{in}\right| = \left|\frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}\right| \leq \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}$$

Et

$$|V_N| = \left|\mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{N} \mathrm{e}^{in}\right)\right| \leq \left|\sum_{n=0}^{N} \mathrm{e}^{in}\right| \leq \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}$$

Les sommes partielles sont bornées et la suite $\frac{1}{n}$ est décroissante et tend vers 0. Cela montre que la série de terme général $u_n = \frac{\sin(n)}{n}$ converge.

7. Tentons de faire un développement limité en $\frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 1$ donc à l'ordre 2 ou $3/2$, dans le premier terme on va perdre un ordre à cause du n devant le ln et dans la cos la variable sera $1/\sqrt{n}$

$$u_n = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$
$$= n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \left(1 - \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^4}{4!} + o\left(\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^4\right)\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{7}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{7}{24n^2}$$

Il s'agit du terme général d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 2 > 1$ donc la série de terme général u_n converge.

Allez à : Exercice 11

Correction exercice 12.

On pose $v_n = \frac{1}{n!}$, il s'agit d'une série absolument convergente en appliquant la règle de D'Alembert

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{n+1} \to 0 < 1$$

On peut appliquer la formule du produit de deux séries absolument convergentes

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} v_{n-k}v_k\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!\,k!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Comme on le verra dans le chapitre « séries entières »

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$$

Ce qui montre que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = e^2$$

Allez à : Exercice 12

Correction exercice 13.

On pose

$$a_n = \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$$

a_n est le terme général d'une série absolument convergente en appliquant la règle de D'Alembert

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{n+1} \to 0 < 1$$

$|b_n| = \frac{1}{2^n}$ est le terme général d'une série géométrique convergente avec $q = \frac{1}{2} < 1$, donc la série de terme général b_n converge absolument

On peut appliquer la formule du produit de deux séries absolument convergentes

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} b_{n-k}a_k\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!\,2^{n-k}}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = e$$

Comme on le verra dans le chapitre « séries entières » et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}$$

Finalement

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \frac{2e}{3}$$

Allez à : Exercice 13

Correction exercice 14.

1. $u_n \sim \frac{1}{n^2}$ qui est une suite de Riemann convergente car $\alpha = 2 > 1$ donc la série de terme général u_n converge.

   On décompose cette fraction en élément simple

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k'=2}^{n+1} \frac{1}{k'}$$

   En posant $k' = k+1$ dans la seconde somme. $k = 1 \Rightarrow k' = 2$ et $k = n \Rightarrow k' = n+1$

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}$$

   En changeant k' en k.

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Allez à : Exercice 14

   Car tous les termes entre $k = 2$ et $k = n$ se simplifient.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = 1$$

2. $u_n \sim \frac{1}{n^3}$ qui est une suite de Riemann convergente car $\alpha = 3 > 1$ donc la série de terme général u_n converge.

   On décompose cette fraction en élément simple

$$u_n = \frac{\frac{1}{2}}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{\frac{1}{2}}{n+2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\frac{1}{2}}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{\frac{1}{2}}{k+2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2}$$

   Dans la seconde somme on pose $k' = k+1$, $k = 1 \Rightarrow k' = 2$ et $k = n \Rightarrow k' = n+1$

   Dans la troisième somme on pose $k'' = k+2$, $k = 1 \Rightarrow k'' = 3$ et $k = n \Rightarrow k'' = n+3$

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k'=2}^{n+1} \frac{1}{k'} + \frac{1}{2}\sum_{k''=3}^{n+2} \frac{1}{k''}$$

   On change k' en k et k'' en k

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k}$$

On va réunir les valeurs de k comprises entre $k = 3$ et $k = n$

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}\right) - \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}$$

Les trois dernières sommes s'annulent et il reste

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{4}$$

Allez à : Exercice 14

3. $u_n \sim \frac{1}{n^2}$ qui est une suite de Riemann convergente car $\alpha = 2 > 1$ donc la série de terme général u_n converge.

On décompose cette fraction en élément simple

$$u_n = \frac{2n-1}{n(n-2)(n+2)} = \frac{\frac{1}{4}}{n} + \frac{\frac{3}{8}}{n-2} + \frac{-\frac{5}{8}}{n+2}$$

$$\sum_{k=3}^{n} u_k = \sum_{k=3}^{n}\left(\frac{\frac{1}{4}}{k} + \frac{\frac{3}{8}}{k-2} + \frac{-\frac{5}{8}}{k+2}\right) = \frac{1}{4}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} + \frac{3}{8}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k-2} - \frac{5}{8}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k+2}$$

Dans la seconde somme on pose $k' = k - 2$, $k = 3 \Rightarrow k' = 1$ et $k = n \Rightarrow k' = n - 2$

Dans la troisième somme on pose $k'' = k + 2$, $k = 3 \Rightarrow k'' = 5$ et $k = n \Rightarrow k'' = n + 2$

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{4}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} + \frac{3}{8}\sum_{k'=1}^{n-2}\frac{1}{k'} - \frac{5}{8}\sum_{k''=5}^{n+2}\frac{1}{k''}$$

On change k' en k et k'' en k

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{4}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} + \frac{3}{8}\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k} - \frac{5}{8}\sum_{k=5}^{n+2}\frac{1}{k}$$

On va réunir les valeurs de k comprises entre $k = 5$ et $k = n - 2$

$$\sum_{k=3}^{n} u_k = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \sum_{k=3}^{n-2}\frac{1}{k} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right) + \frac{3}{8}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \sum_{k=5}^{n-2}\frac{1}{k} + \frac{1}{n+1}\right)$$
$$- \frac{5}{8}\left(\sum_{k=5}^{n-2}\frac{1}{k} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right) + \frac{3}{8}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) - \frac{5}{8}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)$$
$$+ \frac{1}{4}\sum_{k=3}^{n-2}\frac{1}{k} + \frac{3}{8}\sum_{k=3}^{n-2}\frac{1}{k} - \frac{5}{8}\sum_{k=3}^{n-2}\frac{1}{k}$$

Les trois dernières sommes s'annulent et il reste

$$\sum_{k=3}^{n} u_k = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right)+\frac{3}{8}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)-\frac{5}{8}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$$

$$\sum_{k=3}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{8}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{7}{48}+\frac{25}{32}=\frac{89}{96}$$

Allez à : Exercice 14

4. Il est à peu près clair que u_n tend vers 0, c'est déjà cela, mais comment, on va faire un développement limité en $\frac{1}{n}$ de $|u_n| = \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$ (car $\frac{n+1}{n-1} > 1$), on pose $x = \frac{1}{n}$ donc $n = \frac{1}{x}$

On fait un développement limité à l'ordre 2 car la série de Riemann $\frac{1}{n}$ est divergente et que la série de Riemann $\frac{1}{n^2}$ est convergente (En général il faut aller à un ordre strictement supérieur à 1, dans les cas raisonnable).

$$|u_n| = \ln\left(\frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1}\right) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x)-\ln(1-x) = x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-\left(-x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)$$

$$= 2x+o(x^2) = \frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n}$$

Et voilà, c'est raté la série de terme général u_n ne converge pas absolument, on va essayer de montrer qu'elle converge simplement en utilisant le fait que cette série est alternée.

$$v_n = \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = f(n) \quad \text{avec} \quad f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln(x+1)-\ln(x-1), x \geq 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1} = \frac{x-1-(x+1)}{x^2-1} = -\frac{2}{x^2-1} < 0$$

De plus

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = 0$$

Donc la série de terme général $u_n = (-1)^n v_n$ est convergente.

$$\sum_{k=2}^{n}(-1)^k\ln\left(\frac{k+1}{k-1}\right) = \sum_{k=2}^{n}(-1)^k(\ln(k+1)-\ln(k-1))$$

$$= \sum_{k=2}^{n}(-1)^k\ln(k+1) - \sum_{k=2}^{n}(-1)^k\ln(k-1)$$

Dans la première somme on pose $k' = k+1$, $k=2 \Rightarrow k'=3$ et $k=n \Rightarrow k'=n+1$

Dans la seconde somme on pose $k'' = k-1$, $k=2 \Rightarrow k'=1$ et $k=n \Rightarrow k''=n-1$

$$\sum_{k=2}^{n}(-1)^k\ln\left(\frac{k+1}{k-1}\right) = \sum_{k'=3}^{n+1}(-1)^{k'-1}\ln(k') - \sum_{k''=1}^{n-1}(-1)^{k''+1}\ln(k'')$$

On remarque que $(-1)^{k''+1} = (-1)^{k''-1}(-1)^2 = (-1)^{k''-1}$, puis on remplace k' et k'' par k dans chacune des sommes

$$\sum_{k=2}^{n}(-1)^k\ln\left(\frac{k+1}{k-1}\right) = \sum_{k=3}^{n+1}(-1)^{k-1}\ln(k) - \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\ln(k)$$

$$= \sum_{k=3}^{n-1}(-1)^{k-1}\ln(k) + (-1)^{n-1}\ln(n) + (-1)^{(n+1)-1}\ln(n+1)$$

$$-\left((-1)^{1-1}\ln(1)+(-1)^{2-1}\ln(2)+\sum_{k=3}^{n-1}(-1)^{k-1}\ln(k)\right)$$

Les deux sommes se simplifient

$$\sum_{k=2}^{n}(-1)^k\ln\left(\frac{k+1}{k-1}\right)=\sum_{k=3}^{n+1}(-1)^{k-1}\ln(k)-\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\ln(k)$$
$$=(-1)^{n-1}\ln(n)+(-1)^n\ln(n+1)+\ln(2)=(-1)^{n-1}(\ln(n)-\ln(n+1))+\ln(2)$$
$$=(-1)^{n-1}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)+\ln(2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=2}^{n}(-1)^k\ln\left(\frac{k+1}{k-1}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left((-1)^{n-1}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)+\ln(2)\right)=\ln(2)$$

Allez à : Exercice 14

5. $u_n=\ln\left(1-\frac{1}{(n+2)^2}\right)\sim-\frac{1}{(n+2)^2}\sim-\frac{1}{n^2}$, il s'agit d'une suite de Riemann avec $\alpha=2>1$, la série converge.

Petit calcul

$$1-\frac{1}{(k+2)^2}=\frac{(k+2)^2-1}{(k+2)^2}=\frac{(k+2-1)(k+2-1)}{(k+2)^2}=\frac{(k+3)(k+1)}{(k+2)^2}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{(k+2)^2}\right)=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{(k+3)(k+1)}{(k+2)^2}\right)=\sum_{k=1}^{n}\ln(k+3)+\sum_{k=1}^{n}\ln(k+1)-2\sum_{k=1}^{n}\ln(k+2)$$

Dans la première somme on pose $k'=k+3$, $k=1\Rightarrow k'=4$, $k=n\Rightarrow k'=n+3$

Dans la deuxième somme on pose $k''=k+1$, $k=1\Rightarrow k''=2$, $k=n\Rightarrow k''=n+1$

Dans la troisième somme on pose $k'''=k+2$, $k=1\Rightarrow k'''=3$, $k=n\Rightarrow k''=n+2$

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{(k+2)^2}\right)=\sum_{k'=4}^{n+3}\ln(k')+\sum_{k''=2}^{n+1}\ln(k'')-2\sum_{k'''=3}^{n+2}\ln(k''')$$

On remplace k',k'' et k''' par k

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{(k+2)^2}\right)=\sum_{k=4}^{n+3}\ln(k)+\sum_{k=2}^{n+1}\ln(k)-2\sum_{k=3}^{n+2}\ln(k)$$

On va réunir les sommes entre $k=4$ et $k=n+1$

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{(k+2)^2}\right)$$
$$=\left(\sum_{k=4}^{n+1}\ln(k)+\ln(n+2)+\ln(n+3)\right)+\left(\ln(2)+\ln(3)+\sum_{k=4}^{n+1}\ln(k)\right)$$
$$-2\left(\ln(3)+\sum_{k=4}^{n+1}\ln(k)+\ln(n+1)\right)$$

Les sommes de $\ln(k)$ de $k=4$ à $k=n+1$ s'éliminent.

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{(k+2)^2}\right)=(\ln(n+2)+\ln(n+3))+(\ln(2)+\ln(3))-2(\ln(3)+\ln(n+1))$$
$$=\ln\left(\frac{(n+2)(n+3)}{(n+1)^2}\right)+\ln(2)-\ln(3)$$
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+2)(n+3)}{(n+1)^2}=1$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{(k+2)^2}\right)=\ln(2)-\ln(3)=\ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

Allez à : Exercice 14

Correction exercice 15.

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (av_k + bv_{k+1} + cv_{k+2}) = a\sum_{k=0}^{n} v_k + b\sum_{k=0}^{n} v_{k+1} + c\sum_{k=0}^{n} v_{k+2}$$

Dans la deuxième somme on pose $k' = k + 1$, $k = 0 \Rightarrow k' = 1$ et $k = n \Rightarrow k' = n + 1$

Dans la troisième somme on pose $k'' = k + 2$, $k = 0 \Rightarrow k' = 2$ et $k = n \Rightarrow k' = n + 2$

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = a\sum_{k=0}^{n} v_k + b\sum_{k'=1}^{n+1} v_{k'} + c\sum_{k''=2}^{n+2} v_{k''}$$

On change k' et k'' par k.

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = a\sum_{k=0}^{n} v_k + b\sum_{k=1}^{n+1} v_k + c\sum_{k=2}^{n+2} v_k$$

On réunit les sommes entre $k = 2$ et $k = n$

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = a\left(v_0 + v_1 + \sum_{k=2}^{n} v_k\right) + b\left(v_1 + \sum_{k=2}^{n} v_k + v_{n+1}\right) + c\left(\sum_{k=2}^{n} v_k + v_{n+1} + v_{n+2}\right)$$

$$= a(v_0 + v_1) + bv_1 + bv_{n+1} + c(v_{n+1} + v_{n+2}) + (a + b + c)\sum_{k=2}^{n} v_k$$

$$= a(v_0 + v_1) + bv_1 + bv_{n+1} + c(v_{n+1} + v_{n+2})$$

Car $a + b + c = 0$

La suite tend vers 0 donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \lim_{n\to+\infty} \big(a(v_0 + v_1) + bv_1 + bv_{n+1} + c(v_{n+1} + v_{n+2})\big) = a(v_0 + v_1) + bv_1$$

Allez à : Exercice 15

Correction exercice 16.

1. On va d'abord diviser $n^3 + 1$ par $n^2 + 1$, ce qui donne $n^3 + 1 = (n^2 + 1)n + (-n + 1)$, donc

$$\frac{n^3 + 1}{n^2 + 1} = n + \frac{-n + 1}{n^2 + 1}$$

Et alors

$$u_n = \sin\left(\pi\frac{n^3 + 1}{n^2 + 1}\right) = \sin\left(n\pi + \frac{-n + 1}{n^2 + 1}\pi\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{-n + 1}{n^2 + 1}\pi\right)$$

On va montrer que la série est alternée, mais comme $-n + 1 < 0$, le sinus va être négatif aussi, on va légèrement modifier u_n

$$u_n = \sin\left(\pi\frac{n^3 + 1}{n^2 + 1}\right) = (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{n - 1}{n^2 + 1}\pi\right)$$

Puis on va montrer que $v_n = \sin\left(\frac{n-1}{n^2+1}\pi\right)$ est décroissante et qu'elle tend vers 0

$\frac{n-1}{n^2+1}$ tend vers 0, donc v_n tend vers $\sin(0) = 0$.

Avant de montrer que la suite est décroissante on va montrer que $\frac{n-1}{n^2+1}\pi \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

$\frac{n-1}{n^2+1}\pi > 0$ c'est clair

$$\frac{\pi}{2} - \frac{n - 1}{n^2 + 1}\pi = \left(\frac{1}{2} - \frac{n - 1}{n^2 + 1}\right)\pi = \frac{n^2 + 1 - 2(n - 1)}{2(n^2 + 1)}\frac{\pi}{2} = \frac{n^2 - 2n + 3}{2(n^2 + 1)}\frac{\pi}{2} = \frac{(n - 1)(n - 3)}{2(n^2 + 1)}\frac{\pi}{2} > 0$$

Pour $n > 3$ (n tend vers l'infini donc on n'a pas de problème pour les petites valeurs de n)

$$v_n = \sin\left(\frac{n - 1}{n^2 + 1}\pi\right) = f(n) \qquad \text{avec} \quad f(x) = \sin\left(\frac{x - 1}{x^2 + 1}\pi\right)$$

$$f'(x)=\left(\frac{x-1}{x^2+1}\pi\right)'\cos\left(\frac{x-1}{x^2+1}\pi\right)=\pi\frac{1\times(x^2+1)-(x-1)\times 2x}{(x^2+1)^2}\cos\left(\frac{x-1}{x^2+1}\pi\right)$$
$$=\pi\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}\cos\left(\frac{x-1}{x^2+1}\pi\right)$$

Au moins pour x assez grand, $-x^2+2x+1<0$ et pour x assez grand (que 3) $\frac{x-1}{x^2+1}\pi\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos\left(\frac{x-1}{x^2+1}\pi\right)>0$, la fonction est décroissante donc la suite est décroissante. Finalement il s'agit d'une série alternée convergente.

2.

$$u_n=\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)(\ln(n))^{2011}=\left(1-\left(1-\frac{\left(\frac{\pi}{n}\right)^2}{2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)(\ln(n))^{2011}$$
$$=\left(\frac{\pi^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)(\ln(n))^{2011}\sim\frac{\pi^2}{2n^2}(\ln(n))^{2011}$$
$$n^{\frac{3}{2}}\frac{\pi^2}{2n^2}(\ln(n))^{2011}=\frac{\pi^2}{2n^{\frac{1}{2}}}(\ln(n))^{2011}\to 0$$

D'après la règle de Riemann la série de terme général u_n converge.

3. On rappelle que pour tout $x\geq 0$, $\sin(x)\leq x$

$$0\leq u_n=\int_0^{\frac{\pi}{n}}\sqrt{\sin(x)}\,dx\leq\int_0^{\frac{\pi}{n}}\sqrt{x}dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{n}}=\frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{3}\times\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

$\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente, avec $\alpha=\frac{3}{2}>1$. Donc la série de terme général u_n converge.

4. $u_n=\frac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{1+n}$ n'est pas de signe constant mais il parait délicat d'appliquer le TSSA

$$u_n=\frac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{1+n}=\frac{1}{1+n}+(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{1+n}$$

$\frac{1}{n+1}\sim\frac{1}{n}$ est le terme général d'une série de Riemann avec $\alpha=1\leq 1$, donc divergente.

Posons $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{1+x}$, on a alors $f(n)=\frac{\sqrt{n}}{1+n}$

$$f(n)>0\quad\text{et}\quad\lim_{n\to+\infty}f(n)=0$$

C'est évident. Et pour tout $x>1$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1+x)-\sqrt{x}}{(1+x)^2}=\frac{(1+x)-2x}{2\sqrt{x}(1+x)^2}=\frac{1-x}{2\sqrt{x}(1+x)^2}<0$$

Ce qui montre que la suite $\left(\frac{\sqrt{n}}{1+n}\right)$ est décroissante, d'après le TSSA la série de terme général $(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{1+n}$ converge.

u_n est la somme du terme général d'une série divergente ($\frac{1}{n+1}$) et du terme général d'une série convergente $(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{1+n}$, donc la série de terme général u_n diverge.

5. D'après la règle de Cauchy

$$(u_n)^{\frac{1}{n}}=\left(\frac{1}{(\ln(n))^n}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{\ln(n)}\to 0<1$$

Donc la série de terme général u_n converge.

6. Cela va dépendre de la valeur de α

$$(u_n)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{2^n}{n^2}(\sin(\alpha))^{2n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{2\sin^2(\alpha)}{n^{\frac{2}{n}}}$$

$$n^{\frac{2}{n}} = e^{\frac{2}{n}\ln(n)} \to e^0 = 1$$

Donc

$$(u_n)^{\frac{1}{n}} \to 2\sin^2(\alpha)$$

D'après la règle de Cauchy

Si $2\sin^2(\alpha) < 1$, autrement dit si $\sin^2(\alpha) < \frac{1}{2}$, soit encore $-\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin(\alpha) < \frac{\sqrt{2}}{2}$, c'est-à-dire si $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$ ou $\alpha \in \left]\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Cela se voit assez facilement sur le cercle trigonométrique.

La série de terme général u_n converge

Si $2\sin^2(\alpha) > 1$, autrement dit si $\sin^2(\alpha) > \frac{1}{2}$, soit encore $-1 \le \sin(\alpha) < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin(\alpha) \le 1$, c'est-à-dire si $\alpha \in \left]\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$ ou $\alpha \in \left]\frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$

La série de terme général u_n diverge.

Si $2\sin^2(\alpha) = 1$ on ne peut pas conclure avec la règle de Cauchy, mais alors

$$u_n = \frac{2^n}{n^2}(\sin(\alpha))^{2n} = \frac{(2\sin^2(\alpha))^n}{n^2} = \frac{1}{n^2}$$

Qui est le terme général d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 2 > 1$

Allez à : Exercice 16

Correction exercice 17.

1.

a. La suite u_n n'est pas forcément positive mais à partir d'un certain rang $0 < \frac{a}{k} < \pi$ donc les termes $\sin\left(\frac{a}{k}\right)$ sont positifs donc u_n ne change plus de signe lorsque que n augmente. Elle est de signe constant.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!\prod_{k=1}^{n+1}\sin\left(\frac{a}{k}\right)}{n!\prod_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{a}{k}\right)} = (n+1)\sin\left(\frac{a}{n+1}\right) \sim (n+1) \times \frac{a}{n+1} = a$$

D'après la règle de D'Alembert si $a < 1$ alors la série converge et si $a > 1$ la série diverge.

b. Si la série converge alors la suite tend vers 0.

2.

a. $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ donc a_n tend vers 0, on va faire un développement limité de a_n en $\frac{1}{n}$ à l'ordre 2.

Attention en multipliant par n on va perdre un ordre. Remarque $\sin\left(\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ donc $n\sin\left(\frac{1}{n}\right) < 1$ et la suite a_n est négatif (donc de signe constant).

$$a_n = \ln\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \ln\left(n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = -\frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\sim -\frac{1}{6n^2}$$

$-\frac{1}{6n^2}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$). Donc la série de terme général a_n converge.

b. Pour $a = 1$

$$u_n = n!\prod_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n} k\sin\left(\frac{1}{k}\right)$$

Donc

$$\ln(u_n) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} k\sin\left(\frac{1}{k}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(k\sin\left(\frac{1}{k}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

La série de terme général a_n converge, donc la suite (u_n) converge.

Allez à : Exercice 17

Correction exercice 18.

1. Dans un premier temps remarquons que pour tout $n \geq 1$, $u_n > 0$, on en déduit que

$$0 < u_{n+1} < \frac{1}{n}$$

Cela montre que la suite (u_n) tend vers 0 mais cela ne suffit pas pour montrer que la série est convergente (si on avait pu montrer que $0 < u_{n+1} < \frac{1}{n^2}$ là cela aurait été bon).

Dans un deuxième temps on va faire un développement limité en « u_n »

$$u_{n+1} = \frac{1}{n}\left(1 - u_n + o(u_n)\right) = \frac{1}{n} - \frac{u_n}{n} + o\left(\frac{u_n}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$$

$\frac{1}{n}$ est le terme général d'une série de Riemann divergente donc la série de terme général u_n diverge.

2.

$$(-1)^{n+1}u_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{n} - (-1)^{n+1}\frac{u_n}{n} + o\left(\frac{u_n}{n}\right)$$

$\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ est une série alternée, $\frac{1}{n}$ tend vers 0 en décroissant, c'est le terme général d'une série de Riemann.

$$\left|(-1)^{n+1}\frac{u_n}{n} + o\left(\frac{u_n}{n}\right)\right| \sim \frac{u_n}{n}$$

Et $0 < \frac{u_n}{n} < \frac{1}{n(n-1)} \sim \frac{1}{n^2}$ par conséquent $(-1)^{n+1}\frac{u_n}{n} + o\left(\frac{u_n}{n}\right)$ est le terme général d'une série absolument convergente, c'est donc le terme général d'une série convergente et enfin $(-1)^{n+1}u_{n+1}$ est le terme général d'une série convergente. (il en est de même pour $(-1)^n u_n$ évidemment).

Allez à : Exercice 18

Correction exercice 19.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{e^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1+\frac{1}{2}}}}{\dfrac{e^n n!}{n^{n+\frac{1}{2}}}} = \frac{e^{n+1}(n+1)!\,n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n n!\,(n+1)^{n+\frac{1}{2}}(n+1)} = \frac{e^1(n+1)n^{n+\frac{1}{2}}}{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}(n+1)} = \frac{en^{n+\frac{1}{2}}}{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}}$$

$$= e\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}} = ee^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)} = ee^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} = ee^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

Le but est de faire un développement limité de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ en $\frac{1}{n}$ à l'ordre 2.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = ee^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)} = ee^{-\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = ee^{-1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{3n^2}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$= e^{\frac{1}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n}\right)} = 1 + \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Par conséquent

$$z_n = \ln\left(1 + \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{12n^2}$$

$\frac{1}{12n^2}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente donc z_n est le terme général d'une série convergente.

D'autre part

$$\sum_{k=1}^{n} z_k = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} (\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)) = \sum_{k=1}^{n} \ln(u_{k+1}) - \sum_{k=1}^{n} \ln(u_k)$$

Dans la première somme on pose $k' = k + 1$, $k = 1 \Rightarrow k' = 2$ et $k = n \Rightarrow k' = n + 2$

$$\sum_{k=1}^{n} z_k = \sum_{k'=2}^{n+1} \ln(u_{k'}) - \sum_{k=1}^{n} \ln(u_k)$$

On change k' en k dans la première somme et on simplifie

$$\sum_{k=1}^{n} z_k = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_1)$$

$$\ln(u_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n} z_k + \ln(u_1)$$

La série de terme général z_k converge donc $\ln(u_{n+1})$ converge et finalement u_{n+1} admet une limite finie.

Allez à : Exercice 19

Correction exercice 20.

Commençons par une mauvaise nouvelle, si u_n et v_n sont les termes généraux de séries absolument convergente alors w_n est le terme général de la série produit, qui est convergente et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

Seulement voilà la série de terme général v_n ne converge pas absolument alors il faut faire autrement.

$$\sum_{n=0}^{N} w_n = \sum_{n=0}^{N} \left(\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{N} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} \frac{(-1)^{n-k}}{n-k+1}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \left((-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^2(n-k+1)}\right)$$

Puis on va décomposer la fraction rationnelle $\frac{1}{(k+1)^2(n-k+1)}$ en éléments simples, il existe a, b et c (ces trois constantes peuvent dépendre de n) tels que :

$$\frac{1}{(k+1)^2(n-k+1)} = \frac{a}{(k+1)^2} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{n-k+1}$$

Je multiplie par $(k+1)^2$, puis $k = -1$

$$a = \left[\frac{1}{n-k+1}\right]_{k=-1} = \frac{1}{n+2}$$

Je multiple par $n - k + 1$, puis $k = n + 1$

$$c = \left[\frac{1}{(k+1)^2}\right]_{k=n+1} = \frac{1}{(n+2)^2}$$

Je multiplie par k, puis $k \to +\infty$

$$0 = b - c \Rightarrow b = \frac{1}{(n+2)^2}$$

Finalement on a

$$\frac{1}{(k+1)^2(n-k+1)} = \frac{\frac{1}{n+2}}{(k+1)^2} + \frac{\frac{1}{(n+2)^2}}{k+1} + \frac{\frac{1}{(n+2)^2}}{n-k+1}$$

Ce que l'on remplace dans la somme partielle
$$\sum_{n=0}^{N} w_n = \sum_{n=0}^{N}\left((-1)^n \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\frac{1}{n+2}}{(k+1)^2}+\frac{\frac{1}{(n+2)^2}}{k+1}+\frac{\frac{1}{(n+2)^2}}{n-k+1}\right)\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{N}\left((-1)^n\left(\frac{1}{n+2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(n+2)^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n-k+1}\right)\right)$$
Puis on va faire le changement d'indice $k' = n-k$ dans la somme
$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n-k+1}$$
$$k=0 \Rightarrow k'=n \qquad \text{et} \qquad k=n \Rightarrow k'=0$$
$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n-k+1}=\sum_{k'=0}^{n}\frac{1}{k'+1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}$$
Ce que l'on remplace dans la somme partielle
$$\sum_{n=0}^{N} w_n = \sum_{n=0}^{N}\left((-1)^n\left(\frac{1}{n+2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(n+2)^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\right)\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{N}\left((-1)^n\left(\frac{1}{n+2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{2}{(n+2)^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\right)\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{N}\left(\frac{(-1)^n}{n+2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2}\right)+2\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{(-1)^n}{(n+2)^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\right)=S_{1,N}+S_{2,N}$$
Où $w_{1,n}=\frac{(-1)^n}{n+2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2}$ est le terme général de la série S_1 et $w_{2,n}=\frac{(-1)^n}{(n+2)^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}$ le terme général de la série S_2.
On rappelle un résultat « connu »,
$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\sim \ln(n)$$
Alors
$$n^{\frac{3}{2}}|w_{2,n}|=n^{\frac{3}{2}}\frac{1}{(n+2)^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\sim\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}\to 0$$
D'après les règles de Riemann la série de terme général converge absolument, donc $S_{1,N}$ admet une limite finie lorsque N tend vers l'infini.
Pour la série S_1 cela va être moins simple $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2}$ est une somme partielle qui admet une limite puisque que le terme général est équivalent à $\frac{1}{k^2}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente, mais le terme $\frac{(-1)^n}{n+2}$ ne permet pas d'espérer une convergence absolue, reste la solution de montrer qu'il s'agit d'une série alternée, il faut montrer que
$a_n=\frac{1}{n+2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2}$
Tend vers 0 et est dévroissant, $a_n\to 0$ c'est évident.
$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+3}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{(k+1)^2}-\frac{1}{n+2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2}$$
$$=\frac{(n+2)\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{(k+1)^2}-(n+3)\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2}}{(n+2)(n+3)}$$

Donc $a_{n+1} - a_n$ a le même signe que

$$(n+2)\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{(k+1)^2} - (n+3)\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2}$$

$$= (n+2)\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2}\right) - (n+3)\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2} = \frac{1}{n+2} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2}$$

Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $k+1 < n+1$, donc

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2} > \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n}1 = \frac{1}{(n+1)^2}\times(n+1) = \frac{1}{n+1}$$

Par conséquent

$$\frac{1}{n+2} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2} < \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)} < 0$$

Ce qui montre bien que $a_{n+1} - a_n < 0$ c'est-à-dire que la suite est décroissante.

Par conséquent

$$w_{1,n} = \frac{(-1)^n}{n+2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2} = (-1)^n a_n$$

Est le terme général d'une série convergente et enfin la série de terme général w_n est la somme de deux série convergente, elle converge.

Allez à : Exercice 20

Correction exercice 21.

$\frac{1}{\sqrt{n}}$ est décroissant et tend vers 0 donc la série de terme général u_n est une série convergente.

$\frac{1}{n}$ est le terme général d'une série de Riemann divergente donc la série de terme général v_n est la somme d'une série convergente et d'une série divergente, elle diverge.

$$\frac{v_n}{u_n} = \frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}}{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = 1 + \frac{\sqrt{n}}{(-1)^n n} = 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \to 1$$

Ce qui montre que ces deux suites sont équivalentes.

Remarque :

Si $u_n \sim v_n$ alors les séries de terme général u_n et de terme général v_n sont de même nature est un résultat faux, pour qu'il soit vrai, il faut que u_n et v_n soient de signes constants.

Allez à : Exercice 21

Correction exercice 22.

1. $\forall x \in [0,1], x^n e^{-x} > 0$ donc $f(n) > 0$

$$\forall x \in [0,1], 0 \le x \le 1 \Rightarrow 0 \le x^{n+1} \le x^n$$

Donc

$$\int_0^1 x^{n+1}e^{-x}dx \le \int_0^1 x^n e^{-x}dx$$

Autrement dit $f(n+1) \le f(n)$, cette suite est décroissante.

$$f(n) = \int_0^1 x^n e^{-x}dx = [-x^n e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 nx^{n-1}(-e^{-x})dx = -\frac{1}{e} + nf(n-1)$$

Montrons par récurrence que

$$f(n) = \frac{n!}{e}\left(e - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)$$

Pour $n = 0$

$$\int_0^1 x^0 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^1 = -\frac{1}{e} + 1$$

$$\frac{0!}{e}\left(e - \sum_{k=0}^{0} \frac{1}{k!}\right) = \frac{1}{e}(e-1) = 1 - \frac{1}{e}$$

L'hypothèse est vérifiée au rang 0.
Supposons

$$f(n-1) = \frac{(n-1)!}{e}\left(e - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}\right)$$

Alors

$$f(n) = -\frac{1}{e} + nf(n-1) = -\frac{1}{e} + n\frac{(n-1)!}{e}\left(e - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}\right) = -\frac{1}{e} + \frac{n!}{e}\left(e - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}\right)$$

$$= \frac{n!}{e} \times \left(-\frac{1}{n!}\right) + \frac{n!}{e}\left(e - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}\right) = \frac{n!}{e}\left(e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)$$

Ce qui achève la récurrence

2. Pour tout $x \in [0,1]$, $e^{-1} \leq e^{-x} \leq e^{-0}$, on en déduit que :

$$\frac{1}{e} \times x^n \leq x^n e^{-x} \leq x^n$$

Puis en intégrant en 0 et 1

$$\frac{1}{e}\int_0^1 x^n dx \leq f(n) \leq \int_0^1 x^n dx$$

Comme

$$\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

Cela donne

$$\frac{1}{e(n+1)} \leq f(n) \leq \frac{1}{n+1}$$

$f(n)$ est minorée par $\frac{1}{e(n+1)} \sim \frac{1}{en}$ qui est le terme général d'une série de Riemann divergente donc la série de terme général $f(n)$ diverge.

$$\frac{1}{en(n+1)} \leq \frac{f(n)}{n} \leq \frac{1}{n(n+1)}$$

$\frac{f(n)}{n}$ est majorée par $\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente donc la série de terme général $\frac{f(n)}{n}$ converge.

$f(n)$ est positive et décroissante, la série de terme général $(-1)^n f(n)$ est une série alternée convergente.

3. Soit R le rayon de convergence de la série entière. Comme la série de terme général $f(n)$ diverge cela signifie que 1 n'est pas dans le disque de convergence sinon

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) 1^n$$

Convergerait, cela entraine que $R \geq 1$
Comme la série de terme général $(-1)^n f(n)$ converge, cela signifie que -1 est dans le disque de converge donc $R \leq 1$, en effet

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)(-1)^n < +\infty$$

Allez à : Exercice 22

Correction exercice 23.

1. On a $0 < \sin(u) < u$ pour $u > 0$ donc
$$0 < n\sin\left(\frac{1}{n}\right) < n \times \frac{1}{n} = 1$$
Par conséquent
$$\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^a} > \left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^b} > 0$$
Puisque $n^b > n^a$
Cela montre que le terme général $\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^b}$ est majoré par le terme général d'une série convergente, cette série converge.
2.
$$\ln(u_n) = \ln\left(\left(n\ \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^a}\right) = n^a \ln\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$
Il faut faire le développement limité de $\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ à un ordre suffisant parce que l'on va d'abord multiplier par n puis par n^a et à la fin on veut un développement limité à un ordre strictement supérieur à 2.
$$\ln(u_n) = n^a \ln\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) = n^a \ln\left(n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right) = n^a \ln\left(1 - \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$
$$= n^a\left(-\frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = -\frac{1}{6n^{2-a}} + o\left(\frac{1}{n^{3-a}}\right)$$
Comme $a \leq 2$, $2 - a \geq 0$, ce qui montre que $\ln(u_n)$ tend vers 0, et que donc u_n tend vers $1 \neq 0$, la série ne converge pas.
3.
$$\ln(u_n) = n^{2+\epsilon} \ln\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) = n^{2+\epsilon} \ln\left(n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right) = n^{2+\epsilon} \ln\left(1 - \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$
$$= n^{2+\epsilon}\left(-\frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = -\frac{n^\epsilon}{6} + o\left(\frac{1}{n^{1-\epsilon}}\right)$$
$$u_n = \exp\left(-\frac{n^\epsilon}{6} + o\left(\frac{1}{n^{1-\epsilon}}\right)\right) = \exp\left(-\frac{n^\epsilon}{6}\right)\exp\left(o\left(\frac{1}{n^{1-\epsilon}}\right)\right)$$
$1 - \epsilon > 0$ donc $\frac{1}{n^{1-\epsilon}} \to 0$ et alors $\exp\left(o\left(\frac{1}{n^{1-\epsilon}}\right)\right) \to 1$, ce qui montre que
$$u_n \sim \exp\left(-\frac{n^\epsilon}{6}\right)$$
En utilisant les règles de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$
$$\lim_{n\to+\infty} n^2 u_n = \lim_{n\to+\infty} n^2 \exp\left(-\frac{n^\epsilon}{6}\right) = 0$$
Ce qui montre que la série de terme général u_n converge.
4. On vient de montrer que la série de terme général u_n était convergente si $2 < a < 3$ et à la première question on a montré qui si la série convergeait pour a alors elle convergeait pour $b > a$, elle converge donc pour tout $a > 2$.

Allez à : Exercice 23

Correction exercice 24.

1.

a)

$$u_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = [\arctan(x)]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$$

b) $x^2 + 1 \geq 1$ donc

$$0 \leq \frac{x^{2n}}{1+x^2} \leq \frac{x^{2n}}{1} = x^{2n}$$

Puis en intégrant entre 0 et 1

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}dx \leq \int_0^1 x^{2n}dx = \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2n+1}$$

2.

a)

$$u_{n+1} + u_n = \int_0^1 \frac{x^{2(n+1)}}{1+x^2}dx + \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{x^{2n+2}+x^{2n}}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{(1+x^2)x^{2n}}{1+x^2}dx = \int_0^1 x^{2n}dx$$
$$= \frac{1}{2n+1}$$

b)

$$\sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (u_{k+1} + u_k) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_{k+1} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$$

Dans la première somme on pose $k' = k+1$, $k = 0 \Rightarrow k' = 1$ et $k = n \Rightarrow k' = n+1$

$$\sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k'=1}^{n+1} (-1)^{k'-1} u_{k'} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$$

On remplace k' par k dans la première somme

$$\sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} u_k + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$$
$$= (-1)^{n-1+1} u_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} u_k + (-1)^0 u_0 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k u_k$$
$$= (-1)^n u_{n+1} + u_0 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} u_k + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k u_k$$
$$= (-1)^n u_{n+1} + u_0 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} u_k - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} u_k = (-1)^n u_{n+1} + \frac{\pi}{4}$$

Il ne reste plus qu'à remarquer que u_n tend vers 0 pour montrer que

$$\sum_{k=0}^{\infty} v_k = \frac{\pi}{4}$$

Allez à : Exercice 24

Suites de fonctions

Exercice 1. Convergence uniforme

Etudier la convergence uniforme des deux suites de fonctions définies sur $[0,1]$ par :

1. $\forall n \geq 1, f_n(x) = \frac{ne^{-x}+x^2}{n+x}$
2. $\forall n \geq 1, g_n(x) = \frac{n}{1+xn}$

Allez à : Correction exercice 1

Exercice 2. Autre outil pour la convergence uniforme

Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall n \geq 0, \forall \alpha \geq 0, f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$$

Allez à : Correction exercice 2

Exercice 3. Convergence uniforme et dérivation

1. Soit la suite de fonction $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers une fonction f dérivable et constater que la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas.
2. Soit $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$

   Montrer que chaque f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ et que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f qui n'est pas $\mathcal{C}^1$.

Allez à : Correction exercice 3

Exercice 4. Convergence uniforme sur un ouvert

On pose $f_n(x) = e^{-nx}\sin(nx)$ avec $x \in \mathbb{R}^+$. Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Allez à : Correction exercice 4

Exercice 5. Convergence simple vers une fonction discontinue

Etudier la convergence, éventuellement uniforme, des suites de fonctions définies par :

a) $f_n: [0,1] \to \mathbb{R}$ avec $f_n(x) = x^n$

b) $g_n: [0,1] \to \mathbb{R}$ avec $g_n(x) = \frac{nx}{nx+1}$

c) $h_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $h_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$

Allez à : Correction exercice 5

Exercice 6. Un cas pathologique

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de fonction définies par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad x < 0 \\ nx & \text{pour} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \text{pour} \quad x > \frac{1}{n} \end{cases}$$

1. Faire une figure pour quelques valeurs de n.
2. Déterminer la limite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ quand n tend vers l'infini.
3. Préciser si la convergence est uniforme dans les trois cas suivants :
   - Sur $]-\infty, 0[$.
   - Sur un segment contenant l'origine.
   - Sur $[a, +\infty[$ où $a > 0$.

Allez à : Correction exercice 6

Exercice 7. Convergence uniforme et intégration

Soit $f_n: [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x(1-nx) & \text{pour } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Etudier la limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Calculer :

$$\int_0^1 f_n(t)dt$$

Y a-t-il convergence uniforme de la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

3. Etudier la convergence uniforme sur $[a,1]$ avec $a > 0$.

Allez à : Correction exercice 7

Exercice 8. On considère la suite de fonctions réelle définies par

$$f_n(x) = \frac{x}{x+n} + \arctan(x), \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

Cette suite est-elle ?

1. Simplement convergente sur $[0,1]$?
2. Uniformément convergente sur $]0,1]$?
3. Uniformément convergente sur $[a,1]$ ($a \in]0,1[$) ?
4. Uniformément convergente sur $[1,+\infty[$?

Allez à : Correction exercice 8

Exercice 9. On considère la suite de fonctions réelles définies par

$$g_n(x) = \frac{nx}{1+nx}, \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

Cette suite est-elle ?

1. Simplement convergente sur $[0,1]$?
2. Uniformément convergente sur $]0,1]$?
3. Uniformément convergente sur $[a,1]$ ($a \in]0,1[$) ?
4. Uniformément convergente sur $[1,+\infty[$?

Allez à : Correction exercice 9

Exercice 10. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $f_n: [-1,1] \to \mathbb{R}$ définies par

$$f_n(x) = \sin(nx^2)\, e^{-nx^2}$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[-1,1]$ vers une fonction f que l'on déterminera.
2. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur $[0,1]$.
3. Montrer que $\forall a \in]0,1[$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a,1]$.

Allez à : Correction exercice 10

Exercice 11. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par

$$f_n(x)=\frac{2^n x}{1+2^n n x^2}$$

1. Etudier la converge simple de cette suite sur $[0,1]$.
2. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, calculer

$$I_n=\int_0^1 f_n(t)dt$$

   Et la limite de I_n lorsque $n\to+\infty$.
3. En déduire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas uniformément convergente sur $[0,1]$.

Allez à : Correction exercice 11

Exercice 12. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $[-1,1]$ par

$$f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2}$$

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers 0.
2. Etudier la convergence de $(f_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[-1,1]$.
3. On considère la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie sur $[-1,1]$ par

$$g_n(x)=\frac{\ln(1+n^2x^2)}{2n^2}$$

   Montrer que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers 0.

Allez à : Correction exercice 12

Exercice 13.

Etudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions (f_n) définies par :

$$f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto x+\frac{x}{1+x}+\cdots+\frac{x}{(1+x)^n}=\sum_{k=0}^{n}\frac{x}{(1+x)^k}$$

Allez à : Correction exercice 13

Exercice 14.

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) définies par :

$$f_n:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto\begin{cases}\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n & \text{si} \quad x\in[0,n]\\ 0 & \text{si} \quad x>n\end{cases}$$

Allez à : Correction exercice 14

Corrections

Correction exercice 1.

1.

$$\forall x \in [0,1], \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{ne^{-x}+x^2}{n+x} = e^{-x}$$

La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $f: x \to e^{-x}$

$$f(x) - f_n(x) = e^{-x} - \frac{ne^{-x}+x^2}{n+x} = \frac{e^{-x}(n+x) - (ne^{-x}+x^2)}{n+x} = \frac{xe^{-x}-x^2}{n+x} = \frac{x(e^{-x}-x)}{n+x}$$

Soit on essaye de calculer le sup de la valeur absolue de cette fonction sur l'intervalle $[0,1]$, ce qui ne s'annonce pas joyeux parce que la principale méthode est d'étudier la fonction, ou bien on cherche à majorer la valeur absolue de cette différence par une expression ne faisant plus apparaître de « x » en sachant que $x \in [0,1]$

$$|f(x) - f_n(x)| = \left|\frac{x(e^{-x}-x)}{n+x}\right| \leq \left|\frac{e^{-x}-x}{n+x}\right|$$

Car $x \in [0,1]$

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \left|\frac{e^{-x}-x}{n+x}\right| \leq \frac{|e^{-x}|+|-x|}{|n+x|} = \frac{e^{-x}+x}{n+x} \leq \frac{1+1}{n+0} = \frac{2}{n}$$

Car $e^{-x} \leq 1$ et $\frac{1}{n+x} < \frac{1}{n+0}$

On en déduit que

$$\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{2}{n} \to 0$$

La suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction $x \to e^{-x}$.

Allez à : Exercice 1

2.

$$\forall x \in [0,1], \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{1+n(x+1)} = \frac{1}{x+1}$$

La suite de fonction (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers $x \to \frac{1}{x+1}$

$$f(x) - f_n(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{n}{1+n(x+1)} = \frac{1+n(x+1)-n(x+1)}{(x+1)\big(1+n(x+1)\big)} = \frac{1}{(x+1)\big(1+n(x+1)\big)}$$

Aucune majoration claire en vue, on va étudier (en vain ou presque) la fonction $g_n(x) = |f(x) - f_n(x)|$

$$g_n(x) = \frac{1}{(x+1)\big(1+n(x+1)\big)} = \frac{1}{x+1+n(x+1)^2} > 0$$

$$g_n'(x) = -\frac{1+2n(x+1)}{(+1+n(x+1)^2)^2}$$

Cette fonction s'annule pour

$$x_n = -\frac{1}{2n} - 1 = -\frac{2n+1}{2n}$$

Soit

$$x_n + 1 = -\frac{1}{2n}$$

Le maximum de cette fonction est donc en $x_n = -\frac{2n+1}{2n}$ et vaut

$$g_n(x_n)=\frac{1}{x_n+1+n(x_n+1)^2}=\frac{1}{-\frac{1}{2n}+n\left(-\frac{1}{2n}\right)^2}=\frac{1}{-\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n}}=\frac{1}{\frac{1}{4n}}=4n$$

Le maximum tend vers l'infini et donc il n'y a pas de convergence uniforme.

Si on n'a rien vu c'est parfait, sinon

$$g_n(x)=\frac{1}{(x+1)\big(1+n(x+1)\big)}=\frac{1}{x+1+n(x+1)^2}$$

Donc

$$g_n\left(\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{\frac{1}{n+1}\left(1+n\frac{1}{n+1}\right)}=\frac{1}{\frac{1}{n+1}\left(1+n\frac{1}{n+1}\right)}=\frac{n+1}{1+\frac{n}{n+1}}\to+\infty$$

Comme

$$\sup_{x\in[0,1]}|f(x)-f_n(x)|=\sup_{x\in[0,1]}g_n(x)\geq g_n\left(\frac{1}{n+1}\right)\to+\infty$$

Cela montre qu'il n'y a pas convergence uniforme.

Allez à : Exercice 1

Correction exercice 2.

Si $x>0$ alors

$$\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=0$$

Car l'exponentielle l'emporte sur le n^α

Si $x=0$ alors $f_n(0)=0$

La suite de fonction converge simplement vers la fonction nulle $\Theta_{\mathbb{R}^+}$

Etude de $|f_n-\Theta_{\mathbb{R}^+}|=f_n$ sur $\mathbb{R}^+$

$$f_n'(x)=n^\alpha e^{-nx}-n^{\alpha+1}xe^{-nx}=n^\alpha e^{-nx}(1-nx)$$

La dérivée est positive pour $x\in\left[0,\frac{1}{n}\right[$, nulle en $\frac{1}{n}$ et négative pour $x\in\left]\frac{1}{n},+\infty\right[$

Donc f_n admet un maximum en $x_n=\frac{1}{n}$

$$f_n(x_n)=n^\alpha\frac{1}{n}\,e^{-\frac{n}{n}}=\frac{n^{\alpha-1}}{e}$$

Si $\alpha\geq1$ alors

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^+}|f_n(x)-\Theta_{\mathbb{R}^+}(x)|=f_n(x_n)=\frac{n^{\alpha-1}}{e}$$

Ne tend pas vers 0 donc la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers $\Theta_{\mathbb{R}^+}$.

Si $\alpha<1$ alors

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^+}|f_n(x)-\Theta_{\mathbb{R}^+}(x)|=f_n(x_n)=\frac{n^{\alpha-1}}{e}\to0$$

Donc la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers $\Theta_{\mathbb{R}^+}$.

Allez à : Exercice 2

Correction exercice 3.

1. Pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}} = 0$$

La suite de fonction (f_n) converge simplement vers $\Theta_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}$ la fonction nulle sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, cette fonction est évidemment dérivable.

$$f_n'(x) = \frac{n \sin(nx)}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \sin(nx)$$

Sauf pour $x = 0$ la suite (f_n') n'a pas de limite.

Allez à : Exercice 3

2.

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} = \sqrt{x^2} = |x|$$

La limite simple est $f(x) = |x|$

Puis on cherche à montrer qu'il y a convergence uniforme

$$\left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x| \right| = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x| = \frac{\left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x|\right)\left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + |x|\right)}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + |x|} = \frac{x^2 + \frac{1}{n^2} - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + |x|}$$

$$= \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + |x|} \leq \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{0 + \frac{1}{n^2}} + 0} = \frac{1}{n^2} \times n = \frac{1}{n}$$

Par conséquent

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x| \right| \leq \frac{1}{n}$$

Et enfin

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x| \right| = 0$$

La suite de fonction (f_n) converge uniformément vers $f(x) = |x|$, fonction qui n'est pas dérivable en 0 donc qui n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Allez à : Exercice 3

Correction exercice 4.

Si $x > 0$ alors

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$$

Car l'exponentielle l'emporte sur le n^α

Si $x = 0$ alors $f_n(0) = 0$

La suite de fonction converge simplement vers la fonction nulle $\Theta_{\mathbb{R}^+}$

Etude de f_n sur $\mathbb{R}^+$

$$f_n'(x) = ne^{-nx}\cos(nx) - ne^{-nx}\sin(nx) = ne^{-nx}\cos(nx)\left(1 - \tan(nx)\right)$$

Là on voit que l'on ne va pas s'en sortir, alors que

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-1}\sin(1)$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^+}|f_n(x) - \Theta_{\mathbb{R}^+}(x)| \le f_n\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-1}\sin(1) \neq 0$$

Donc la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers $\Theta_{\mathbb{R}^+}$.

Sur $[a, +\infty[$, la suite de fonctions converge simplement vers $\Theta_{[a,+\infty[}$

Comme sur $\mathbb{R}^+$ l'étude de la fonction ne va rien donner mais une simple majoration va nous permettre de conclure

$$\left|f_n(x) - \Theta_{[a,+\infty[}(x)\right| = e^{-nx}|\sin(nx)| \le e^{-nx} \le e^{-na}$$

Donc

$$\sup_{x\in[a,+\infty[}\left|f_n(x) - \Theta_{[a,+\infty[}(x)\right| \le e^{-na} \to 0$$

On en déduit que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers $\Theta_{[a,+\infty[}$.

Allez à : Exercice 4

Correction exercice 5.

a) Si $x \in [0,1[$ alors x^n tend vers 0 et si $x = 1$ alors $x^n = 1$, ce qui montre que la suite de fonction converge simplement vers la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in [0,1[\\ 1 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

Si la convergence de la suite de fonctions continues (f_n) convergeait uniformément vers f alors f serait continue, ce qui n'est pas le cas par conséquent la convergence n'est pas uniforme.

b) Si $x \in]0,1]$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{nx}{nx+1} = 1$$

Si $x = 0$ alors $g_n(0) = 0$

Ce qui montre que la suite de fonction converge simplement vers la fonction g définie par

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ 1 & \text{si} \quad x \in]0,1] \end{cases}$$

Si la convergence de la suite de fonctions continues (g_n) convergeait uniformément vers g alors g serait continue, ce qui n'est pas le cas par conséquent la convergence n'est pas uniforme.

c) Si $x \neq 0$ alors $1 + x^2 > 1$ et

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^n} = 0$$

Si $x = 0$ alors $h_n(0) = 1$

Ce qui montre que la suite de fonction converge simplement vers la fonction h définie par

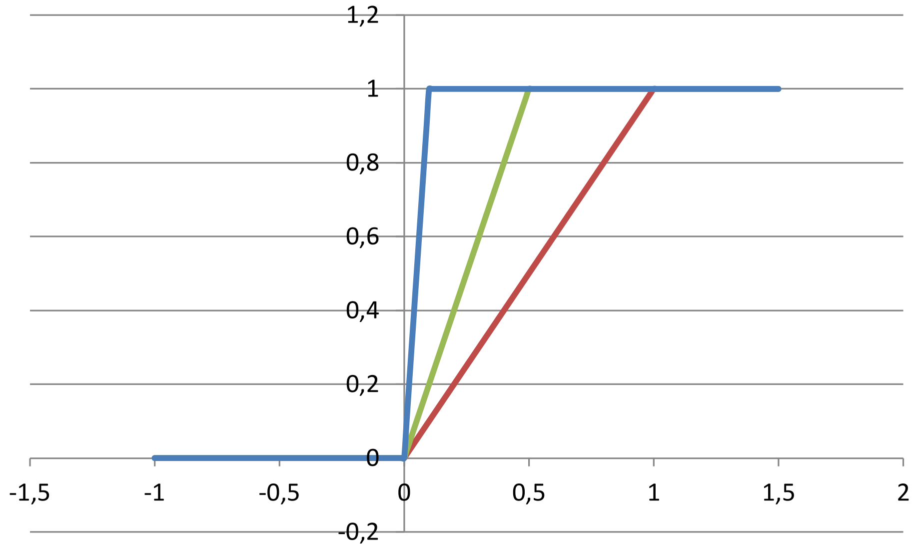
$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Si la convergence de la suite de fonctions continues (h_n) convergeait uniformément vers h alors h serait continue, ce qui n'est pas le cas par conséquent la convergence n'est pas uniforme.

Allez à : Exercice 5

Correction exercice 6.

1.



Courbes pour $n = 1, n = 2$ et $n = 10$

2.

Si $x \leq 0$, $f_n(x) = 0 \to 0$

Si $x > 0$, il existe n_0 tel que $\frac{1}{n_0} < x$ et pour tout $n \geq n_0$ $f_n(x) = 1 \to 1$

Donc la suite de fonction (f_n) converge simplement vers la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

3. Sur $]-\infty, 0[$ la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $\Theta_{]-\infty,0[}$

Comme

$$f_n(x) - \Theta_{]-\infty,0[}(x) = 0$$

La convergence est uniforme

Sur un segment contenant l'origine la suite de fonctions (f_n) converge vers une fonction qui est nulle si $x \leq 0$ et qui vaut 1 pour $x > 0$, c'est-à-dire une fonction discontinue or les fonctions f_n sont continues, en $x = 0$ les limites à gauche et à droite valent 0 et en $x = 1$ les limites à gauche et à droite valent 1, il n'y a pas convergence uniforme.

Sur $[a, +\infty[$ la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction f qui vaut 1 pour tout $x \geq a$

Comme

$$f_n(x) - f(x) = 1 - 1 = 0$$

Il y a convergence uniforme.

Allez à : Exercice 6

Correction exercice 7.

1. Pour $x \in]0,1]$, il existe n_0 tel que $\frac{1}{n_0} < x$, alors pour tout $n \geq n_0$ $f_n(x) = 0 \to 0$

   Pour $x = 0$ alors $f_n(0) = 0$

   Donc la suite de fonction (f_n) converge simplement vers $\Theta_{[0,1]}$.

2. $$\int_0^1 f_n(t)dt = \int_0^{\frac{1}{n}} n^2 t(1 - nt)dt = n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} (t - nt^2)dt = n^2 \left[\frac{t^2}{2} - \frac{nt^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{n}} = n^2 \left(\frac{1}{2n^2} - \frac{n}{3n^3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

   S'il y avait convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) on aurait
   $$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)dt = \int_0^1 \Theta_{[0,1]}(t)dt = 0$$
   Ce qui n'est pas le cas, donc il n'y a pas de convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) vers $\Theta_{[0,1]}$.

3. Sur $[a, 1]$ la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $\Theta_{[a,1]}$, pour tout $n > \frac{1}{a} \Leftrightarrow a > \frac{1}{n}$, et pour tout $x \in [a, 1]$, $f_n(x) = 0$ donc
   $$f_n(x) - \Theta_{[a,1]}(x) = 0$$
   Donc il y a convergence uniforme.

Allez à : Exercice 7

Correction exercice 8.

1. Pour tout $x \in [0,1]$
   $$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \arctan(x)$$
   La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction $\arctan$ sur $[0,1]$.

2. La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction $\arctan$ sur $]0,1]$.
   $$|f_n(x) - \arctan(x)| = \frac{x}{x+n}$$
   On peut étudier cette fonction $(x \to \frac{x}{x+n})$ sur $]0,1]$, on voit qu'elle est croissante et qu'elle atteint son maximum pour $x = 1$ et alors
   $$\sup_{x\in]0,1]} |f_n(x) - \arctan(x)| = \frac{1}{1+n} \to 0$$
   Pour en déduire qu'il y a convergence uniforme sur $]0,1]$

   Ou alors on peut majorer de façon à éliminer les « x »
   $$|f_n(x) - \arctan(x)| = \frac{x}{x+n} \leq \frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{n}$$
   Ainsi
   $$\sup_{x\in]0,1]} |f_n(x) - \arctan(x)| \leq \frac{1}{n} \to 0$$
   Pour en déduire qu'il y a convergence uniforme sur $]0,1]$

3. La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $[a, 1]$ vers $\arctan$ sur $[a, 1]$.

   On peut faire les deux raisonnements de la question ci-dessus
   $$|f_n(x) - \arctan(x)| = \frac{x}{x+n}$$

On peut étudier cette fonction ($x \to \frac{x}{x+n}$) sur $[a,1]$, on voit qu'elle est croissante et qu'elle atteint son maximum pour $x = 1$ et alors

$$\sup_{x\in[a,1]} |f_n(x) - \arctan(x)| = \frac{1}{1+n} \to 0$$

Pour en déduire qu'il y a convergence uniforme sur $[a,1]$

Ou alors on peut majorer de façon à éliminer les « x », attention ici, il y a une petite nuance

$$|f_n(x) - \arctan(x)| = \frac{x}{x+n} \leq \frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{a+n}$$

Mais on aurait aussi pu majorer par $\frac{1}{n}$.

Ainsi

$$\sup_{x\in[a,1]} |f_n(x) - \arctan(x)| \leq \frac{1}{a+n} \to 0$$

Pour en déduire qu'il y a convergence uniforme sur $[a,1]$

4. Pour tout $x \in [1,+\infty[$

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \arctan(x)$$

La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction arctan sur $[1,+\infty[$.

$$|f_n(x) - \arctan(x)| = \frac{x}{x+n}$$

Là, on va avoir un problème pour majorer cette expression indépendamment de x par une expression qui tend vers 0.

Montrons qu'il n'y a pas convergence uniforme, prenons $x_n = n$

$$\sup_{x\in[1,+\infty[} |f_n(x) - \arctan(x)| \geq |f_n(x_n) - \arctan(x_n)| = \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2}$$

Ce sup ne peut pas tendre vers 0, il n'y a pas convergence uniforme.

Allez à : Exercice 8

Correction exercice 9.

1. Pour tout $x \in]0,1]$

$$\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = 1$$

Il faut bien distinguer le cas $x \neq 0$ (c'est la limite des termes de plus haut degré) et le cas où $x = 0$, auquel cas $g_n(0) = 1$

La suite de fonctions (g_n) converge simplement vers la fonction g constante à 1 sur $[0,1]$

2.

$$|g(x) - g_n(x)| = \left|1 - \frac{nx}{1+nx}\right| = \left|\frac{1+nx-nx}{1+nx}\right| = \frac{1}{1+nx}$$

Etude de la fonction $x \to \frac{1}{1+nx}$ sur $]0,1]$, sa dérivée est $-\frac{n}{(1+nx)^2} < 0$ la fonction est décroissante, donc

$$\sup_{x\in]0,1]} \frac{1}{1+nx} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+nx} = 1$$

Cette expression ne tend pas vers 0 donc il n'y a pas convergence uniforme sur $]0,1]$.

Autre méthode

$$\sup_{x\in]0,1]} |g(x) - g_n(x)| \geq \left|g\left(\frac{1}{n}\right) - g_n\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \frac{1}{1+n\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{2}$$

Donc le sup ne peut pas tendre vers 0 et il n'y a pas convergence uniforme sur $]0,1]$

3. La suite de fonctions (g_n) converge simplement vers la fonction constante égal à 1. Reprenons l'étude de la fonction
$$|g(x)-g_n(x)|=\frac{1}{1+nx}$$
Elle est décroissante donc elle atteint son sup pour $x=a$
$$\sup_{x\in[a,1]}|g(x)-g_n(x)|=\frac{1}{1+na}\to 0$$
Dans ce cas il y a convergence uniforme de la suite de fonction (g_n) vers la fonction constante égal à 1.
4. La suite de fonctions (g_n) converge simplement vers la fonction constante égal à 1 sur $[1,+\infty[$. Reprenons l'étude de la fonction
$$|g(x)-g_n(x)|=\frac{1}{1+nx}$$
Elle est décroissante donc elle atteint son sup pour $x=1$
$$\sup_{x\in[a,1]}|g(x)-g_n(x)|=\frac{1}{1+n}\to 0$$
Dans ce cas il y a convergence uniforme de la suite de fonction (g_n) vers la fonction constante égal à 1 sur $[1,+\infty[$.

Allez à : Exercice 9

Correction exercice 10.

1. $f_n(0)=0\to 0$ et pour tout $x\neq 0$
$$\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=0$$
Donc la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $\Theta_{[-1,1]}$
2. la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $\Theta_{[0,1]}$, l'étude de la fonction n'a rien de réjouissant à priori, prenons la suite $x_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$
$$\sup_{x\in[0,1]}\left|f_n(x)-\Theta_{[0,1]}(x)\right|=\sup_{x\in[0,1]}|\sin(nx^2)|e^{-nx^2}\geq|\sin(nx_n^2)|e^{-nx_n^2}=|\sin(1)|e^{-1}$$
Ce sup ne peut pas tendre vers 0, il n'y a pas convergence uniforme sur $[0,1]$.
3. la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $\Theta_{[a,1]}$,
$$\left|f_n(x)-\Theta_{[a,1]}(x)\right|=|\sin(nx^2)|e^{-nx^2}\leq e^{-nx^2}\leq e^{-na^2}$$
Donc
$$\sup_{x\in[a,1]}\left|f_n(x)-\Theta_{[a,1]}(x)\right|\leq e^{-na^2}\to 0$$
La suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers $\Theta_{[a,1]}$ sur $[a,1]$.

Allez à : Exercice 10

Correction exercice 11.

1. Pour tout $x\in]0,1]$
$$\frac{2^nx}{1+2^nnx^2}\sim\frac{2^nx}{2^nnx^2}=\frac{1}{nx}\to 0$$
$$f_n(0)=0$$
La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $\Theta_{[0,1]}$ sur $[0,1]$
2.
$$I_n=\int_0^1\frac{2^nx}{1+2^nnx^2}dx=\left[\frac{1}{n}\ln(1+2^nnx^2)\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{n}\ln(1+2^nn)$$
$$=\frac{1}{n}\ln\left(2^n(2^{-n}+n)\right)$$

$$= \frac{1}{n}(\ln(2^n) + \ln(2^{-n} + n))$$
$$= \frac{1}{n}(n\ln(2) + \ln(2^{-n} + n))$$
$$= \ln(2) + \frac{1}{n}\ln(2^{-n} + n)$$
$$= \ln(2) + \frac{1}{n}\ln\left(n\left(\frac{2^{-n}}{n} + 1\right)\right)$$
$$= \ln(2) + \frac{1}{n}\ln(n) + \frac{1}{n}\ln\left(\frac{2^{-n}}{n} + 1\right)$$
$$\frac{1}{n}\ln\left(\frac{2^{-n}}{n} + 1\right) \sim \frac{1}{n} \times \frac{2^{-n}}{n} \to 0$$
$$\frac{\ln(n)}{n} \to 0$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \ln(2)$$

3. Si la suite de fonctions (f_n) convergeait uniformément vers $\Theta_{[0,1]}$ on aurait
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \Theta_{[0,1]}(x)dx = 0$$
Ce qui n'est pas le cas donc la suite de fonctions ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

Allez à : Exercice 11

Correction exercice 12.

1. Avant la convergence uniforme il faut montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $\Theta_{[-1,1]}$. $f_n(0) = 0 \to 0$ et pour tout $x \neq 0$ la limite de $f_n(x)$ est bien nulle, tout va bien.
On ne voit pas de majorations simple qui permettrait de majorer $|f_n(x) - \Theta_{[-1,1]}(x)|$ par une expression indépendante de x qui tendrait vers 0, on va donc étudier la fonction
$$h_n(x) = |f_n(x) - \Theta_{[-1,1]}(x)| = \frac{|x|}{1 + n^2x^2}$$
La fonction étant paire, on va faire l'étude sur $[0,1]$ ainsi on se débarrasse de la valeur absolue.
$$h_n(x) = \frac{x}{1 + n^2x^2}$$
$$h_n'(x) = \frac{1 + n^2x^2 - x \times 2n^2x}{(1 + n^2x^2)^2} = \frac{1 - n^2x^2}{(1 + n^2x^2)^2}$$

x	0		$\frac{1}{n}$		1
$h_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$h_n(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2n}$	$\searrow$	$\frac{1}{1+n^2}$

On en déduit que le sup de
$$\sup_{x\in[-1,1]} |f_n(x) - \Theta_{[-1,1]}(x)| = \frac{1}{2n} \to 0$$
La suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers $\Theta_{[-1,1]}$ sur $[-1,1]$.
2. En réutilisant le calcul ci-dessus
$$f_n'(x) = \frac{1 - n^2x^2}{(1 + n^2x^2)^2}$$
Pour tout $x \neq 0$

$$\lim_{n\to+\infty} f_n'(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2x^2}{(n^2x^2)^2} = 0$$

Pour $x = 0$, $f_n'(0) = 1$ donc la suite de fonctions (f_n') converge simplement vers la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x = 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \neq 0 \end{cases}$$

Ce qui permet de dire que la convergence de la suite de fonctions continues (f_n') ne converge pas uniformément sinon la limite simple serait continue ce qui n'est pas le cas.

3. Calculons $g_n'(x)$, pour voir.

$$g_n'(x) = \frac{1}{2n^2} \times \frac{2n^2x}{1+n^2x^2} = \frac{x}{1+n^2x^2} = f_n(x)$$

Ah bah çà alors quelle surprise !!!!

La suite de fonctions (g_n') converge uniformément sur $[-1,1]$. Pour $x_0 = 0$ $g_n(0) = 0$ donc la suite de terme général $g_n(x_0)$ converge simplement car la suite de fonction (f_n) converge simplement vers $\Theta_{[-1,1]}$, on en déduit d'après le théorème de dérivation que la suite de terme général (g_n) converge uniformément vers $\Theta_{[-1,1]}$.

Allez à : Exercice 12

Correction exercice 13.

$$f_n(x) = x\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{1+x}\right)^k$$

Si $\frac{1}{1+x} \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$ alors

$$f_n(x) = x\frac{1-\left(\frac{1}{1+x}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{1+x}} = \left(1-\left(\frac{1}{1+x}\right)^{n+1}\right)\frac{x(1+x)}{1-(1+x)} = \left(1-\left(\frac{1}{1+x}\right)^{n+1}\right)\frac{x(1+x)}{-x}$$
$$= 1+x-\left(\frac{1}{1+x}\right)^n$$

Comme $1+x > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 1+x$$

Si $x = 0$

$$f_n(0) = 0 \to 0$$

La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ 1+x & \text{si} \quad x \in]0,1] \end{cases}$$

Les fonctions f_n sont continues, si la convergence était uniforme la fonction f serait continue or f n'est pas continue en $x = 0$

Allez à : Exercice 13

Correction exercice 14.

Convergence simple

Pour tout x il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 > x$ donc pour tout $n > n_0$, $x \in [0,n]$, il faut donc trouver la limite lorsque n tend vers l'infini de $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n$

$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)} = e^{n\left(-\frac{x}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-x+o(1)} \to e^{-x}$$

La suite de fonction (f_n) converge simplement vers f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = e^{-x}$

Convergence uniforme

$$\forall x \in [0, n[, f(x) - f_n(x) = e^{-x} - e^{n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)} = e^{-x}\left(1 - e^{n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)+x}\right)$$

On pose

$$g_n(x) = n\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) + x$$

$$g_n'(x) = n \times \frac{-\frac{1}{n}}{1-\frac{x}{n}} + 1 = \frac{-1}{1-\frac{x}{n}} + 1 = \frac{-1 + \left(1-\frac{x}{n}\right)}{1-\frac{x}{n}} = \frac{-\frac{x}{n}}{1-\frac{x}{n}} = \frac{-x}{n-x} < 0$$

x	0 $\qquad\qquad$ n
$g_n'(x)$	$-$
$g_n(x)$	$0 \searrow -\infty$

Donc pour tout $x \in [0, n[$, $g_n(x) \le 0$, ce qui montre que

$$f(x) - f_n(x) = e^{-x}\left(1 - e^{g_n(x)}\right) \ge 0$$

On pourrait se passer d'avoir montré cela.

On pose $h_n(x) = f(x) - f_n(x)$ et on va chercher les extrémums de cette fonction continue et dérivable sur le fermé borné $[0, n]$, ces extrémums sont soient sur les bords en $h_n(0) = f(0) - f_n(0) = 1 - 1 = 0$, c'est un minimum, soit en $x = n$, $h_n(n) = f(n) - f_n(n) = e^{-n}$, soit en un point où la dérivée est nulle.

$$h_n'(x) = -e^{-x} - n\left(-\frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} = -e^{-x} + \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1}$$

Supposons qu'il existe $x_n \in [0, n]$ (ce qui impose que $0 \le \frac{x_n}{n} \le 1$ tel que $h_n'(x_n) = 0$, rien n'est moins sûr, il se peut que ce x_n n'existe pas (par exemple si $h_n'(x)$ garde un signe constant) soit que ce x_n soit supérieur à n, mais peu importe.

$$h_n'(x_n) = 0 \Leftrightarrow -e_n^{-x_n} + \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^{n-1} = 0 \Leftrightarrow e_n^{-x_n} = \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^{n-1}$$

Puis calculons $h_n(x_n)$

$$h_n(x_n) = f(x_n) - f_n(x_n) = e_n^{-x_n} - \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^{n-1} - \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^n$$
$$= \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^{n-1}\left(1 - \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)\right) = \frac{x_n}{n}\left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^{n-1}$$

Deux cas se présentent

- Soit

$$0 \le 1 - \frac{x_n}{n} \le M < 1 \Leftrightarrow 1 - M < \frac{x_n}{n} < M$$

Dans ce cas

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^{n-1} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} h_n(x_n) = 0$$

- Soit

$$1 - \frac{x_n}{n} \to 1 \Leftrightarrow \frac{x_n}{n} \to 0$$

Dans ce cas

$$\lim_{n\to+\infty} h_n(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n}\left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^{n-1} = 0$$

Dans tous les cas, que x_n existe ou pas le maximum éventuel tend vers 0

Et pour tout $x \ge n$, comme $f_n(x) = 0$

$$|f(x) - f_n(x)| = e^{-x} \le e^{-n}$$

Finalement

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^+} |f(x) - f_n(x)| = \max(h_n(x_n), e^{-n}) \to 0$$

Allez à : Exercice 14

Séries de fonctions

Exercice 1.

On considère la série de fonctions

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$$

1. Etudier la convergence simple de cette série sur $[0,1[$.
2. Etudier la convergence uniforme de cette série sur $[0,a]$ où $a \in]0,1[$.
3. Etudier la convergence uniforme de cette série sur $[0,1[$.

Allez à : Correction exercice 1

Exercice 2.

On considère la série de fonctions

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}\sin(nx)}{\ln(n+1)}$$

1. Etudier la convergence simple de cette série sur $]0,+\infty[$.
2. Etudier la convergence uniforme de cette série sur $[a,+\infty[$ où $a > 0$.

Allez à : Correction exercice 2

Exercice 3. Etudier la convergence simple et la convergence normale de la série de fonction $\sum f_n$ dans les cas suivants :

1. $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$ sur $[0,+\infty[$, puis sur $[0,1]$, puis sur $[0,a]$ avec $a \in]0,1[$.
2. $f_n(x) = \frac{x^2}{n^3+x^3}$ sur $[0,+\infty[$, puis sur $[0,a]$ avec $a > 0$.
3. $f_n(x) = \frac{x}{n^3+x^3}$ sur $[0,+\infty[$.

Allez à : Correction exercice 3

Exercice 4. On considère la série de fonctions

$$\sum_{n\geq 1} f_n \quad \text{avec} \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n x^2}{x^4+n}$$

1. Etudier la convergence simple de la série sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que cette série est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer qu'il n'existe aucune partie de $\mathbb{R}^*$ sur laquelle cette série est normalement convergente.
4. Montrer que cette série est continue.

Allez à : Correction exercice 4

Exercice 5. Montrer que la série de fonctions de terme général

$$u_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx^2}}{(n+1)^3}$$

est continue sur $\mathbb{R}$.

Allez à : Correction exercice 5

Exercice 6.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(x^2+n^2)^2}$ converge uniformément sur tout intervalle $[-a,a]$ où $a > 0$.
2. Montrer que cette série est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Allez à : Correction exercice 6

Exercice 7. Montrer que la série de fonctions

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}\sin(n^2x)$$

Est dérivable.

Allez à : Correction exercice 7

Exercice 8. On considère la série de fonction $\sum_{n\geq 1} f_n$ avec

$$f_n(x)=\frac{\sin(nx)}{n^3}$$

1. Montrer que cette série converge pour tout $x\in\mathbb{R}$.
2. Montrer que $f(x)=\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ est une fonction continue.
3. Montrer que

$$\int_0^{\pi} f(x)dx=2\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n-1)^4}$$

4. Montrer que

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad f'(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{\cos(nx)}{n^2}$$

5.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2}\right)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$$

Allez à : Correction exercice 8

Exercice 9. Soit une suite de fonctions réelles définies sur $[0,1]$ par $f_n(x)=\frac{(-1)^n}{(n+1)(x+1)}$.

1. Montrer que la série de fonctions associée converge simplement vers une fonction f.
2. Montrer que cette série de converge uniformément sur $[0,1]$.
3. La série converge-t-elle normalement ?

Allez à : Correction exercice 9

Exercice 10.

1. Soit f la fonction définie par :

$$f(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{ke^{-kx}}{k^2+1}$$

Déterminer le domaine de définition D de f et montrer que f est continue sur D.

2. Soit g la fonction définie par :

$$g(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k}\frac{e^{-kx}}{k^2+1}$$

Déterminer le domaine de définition D' de g et montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D'.

Allez à : Correction exercice 10

Exercice 11.

Soit $f_n(x)=(-1)^n\frac{e^{-nx}}{n+1}$ pour x un réel positif.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction f sur $[0,+\infty[$.
2. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$, $a>0$. Ce résultat reste-t-il vrai sur $[0,+\infty[$ ou sur $]0,+\infty[$.
3. Montrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$.

Allez à : Correction exercice 11

Exercice 12. Continuité

Montrer que les fonctions suivantes sont définies et continues :

$$f: x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2+\sin(nx)} \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$g: x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$h: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nx+1} \quad \text{sur } \mathbb{R}^{+*}$$

Allez à : Correction exercice 12

Exercice 13. Dérivation

Soit $f_n(x)=\frac{(-1)^n}{n+x}$ avec $]0,+\infty[$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction f.
2. Montrer que

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$$

Allez à : Correction exercice 13

Exercice 14. Limite

On fixe $\alpha>0$ et on pose

$$f_n(x)=e^{-n^\alpha x} \quad \text{et} \quad f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

1. Quel est le domaine de définition de f.
2. Continuité de f.
3. Etudier

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

Allez à : Correction exercice 14

Exercice 15.

Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{e^x-1}dx=\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

On pourra faire intervenir la série de fonctions (f_n) avec $f_n(x)=e^{-(n+1)x}\sin(x)$

Allez à : Correction exercice 15

Corrections

Correction exercice 1.

1. Pour tout $x \in [0,1[$, $x^2 \neq 1$
$$\sum_{n=0}^{N} x^{2n} = \sum_{n=0}^{N} (x^2)^n = \frac{1-(x^2)^{N+1}}{1-x^2} \to \frac{1}{1-x^2}$$
Cette série de fonctions converge simplement vers la fonction $S: x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$.
2. $\forall x \in [0,1[, |x^{2n}| \leq a^{2n}$, or la série de terme général a^{2n} converge (voir 1.) donc la série de fonction de terme général x^{2n} est normalement convergente sur $[0,a]$ par conséquent elle converge uniformément sur $[0,a]$.
3. Supposons que cette série de fonctions converge uniformément sur $[0,1[$ alors elle converge uniformément vers sa limite simple $S: x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$
$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} - \sum_{n=0}^{N} x^{2n}\right| = \left|\frac{1}{1-x^2} - \sum_{n=0}^{N} x^{2n}\right| = \left|\frac{1}{1-x^2} - \frac{1-(x^2)^{N+1}}{1-x^2}\right| = \frac{x^{2N+2}}{1-x^2}$$
On considère la suite de terme général
$$x_N = 1 - \frac{1}{N}$$
$$\frac{\left(1-\frac{1}{N}\right)^{2N+2}}{1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^2} = \frac{e^{(2N+2)\ln\left(1-\frac{1}{N}\right)}}{1-\left(1-\frac{2}{N}+\frac{1}{N^2}\right)} = \frac{e^{(2N+2)\left(-\frac{1}{N}+o\left(\frac{1}{N}\right)\right)}}{\frac{2}{N}-\frac{1}{N^2}} = N^2\frac{e^{-2+o(1)}}{2N-1} \sim \frac{N}{2e} \to +\infty$$
Donc
$$\sup_{x\in[0,1[}\left|\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} - \sum_{n=0}^{N} x^{2n}\right| = \sup_{x\in[0,1[}\left|\frac{x^{2N+2}}{1-x^2}\right| \geq \frac{\left(1-\frac{1}{N}\right)^{2N+2}}{1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^2} \to +\infty$$
Ce qui montre qu'il n'y a pas convergence uniforme de la série de fonction de terme général x^{2n}.

Allez à : Exercice 1

Correction exercice 2.

1. On va appliquer les règles de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$
$$n^2\frac{e^{-nx}\sin(nx)}{\ln(n+1)} \to 0$$
Donc la série (numérique) de terme général $\frac{e^{-nx}\sin(nx)}{\ln(n+1)}$ converge, autrement dit la série de fonction de terme général $f_n: x \mapsto \frac{e^{-nx}\sin(nx)}{\ln(n+1)}$ converge simplement.
2. $$\left|\frac{e^{-nx}\sin(nx)}{\ln(n+1)}\right| < \frac{e^{-na}|\sin(nx)|}{\ln(n+1)} \leq \frac{e^{-na}}{\ln(n+1)}$$
On applique les règles de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$
$$n^2\frac{e^{-na}}{\ln(n+1)} \to 0$$
Donc la série numérique de terme général $\frac{e^{-na}}{\ln(n+1)}$ converge, par conséquent la série fonctions de terme général f_n converge normalement sur $[a,+\infty[$, ce qui entraine que la série fonctions de terme général f_n converge uniformément sur $[a,+\infty[$.

Allez à : Exercice 2

Correction exercice 3.

1. Sur $[0,1[$, $x^n \to 0$ donc $f_n(x) \to 0$
   Si $x = 1$, $f_n(1) = \frac{1}{2}$
   Si $x \in]1,+\infty[$, $x^n \to +\infty$ donc $f_n(x) \to 1$
   Revenons à la série de fonctions de terme général f_n :
   - Sur $[0,+\infty[$, il y a des valeurs pour lesquelles $f_n(x)$ ne tend pas vers 0 donc la série ne converge pas simplement sur $[0,+\infty[$,, donc elle ne converge pas normalement sur $[0,+\infty[$.
   - Sur $[0,1]$, il y a un problème en $x = 1$, $f_n(1) = \frac{1}{2}$ ne tend pas vers 0 donc la série ne converge pas simplement sur $[0,1]$,, donc elle ne converge pas normalement sur $[0,1]$.
   - Sur $[0,a]$, pour tout $x \in [0,a]$ $f_n(x) \to 0$ mais cela ne suffit pas à assurer la converge simple de la série de fonctions de terme général f_n (avec $f_n(x) > 0$)
   $$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n} \sim x^n$$
   x^n est le terme général d'une série géométrique de raison dans $]-1,1[$ donc convergente, ce qui entraine que la série numérique de terme général converge, autrement dit la série de fonctions de terme général f_n converge simplement sur $[0,a]$.
   $$\forall x \in [0,a], \left|\frac{x^n}{1+x^n}\right| \leq \frac{a^n}{1+0} = a^n$$
   a^n est le terme général d'une série géométrique convergente car $a \in]0,1[$ donc la série de fonction de terme général f_n converge normalement.
2. Si $x = 0$, $f_n(0) = 0 \to 0$, la série nulle converge.
   Si $x > 0$, $f_n(x) = \frac{x^2}{n^3+x^3} \sim \frac{x^2}{n^3}$, ce qui est le terme général d'une série numérique de Riemann convergente avec $\alpha = 3 > 1$
   Donc la série de fonction f_n converge simplement sur $[0,+\infty[$.
   $$f_n'(x) = \frac{2x(n^3+x^3) - x^2 \times 3x^2}{(n^3+x^3)^2} = \frac{2nx^3 - x^4}{(n^3+x^3)^2} = \frac{x^3(2n-x)}{(n^3+x^3)^2}$$
   Manifestement les fonctions f_n admettent un maximum en $x = 2n$ (il faut faire un tableau de variation)
   $$f_n(2n) = \frac{(2n)^2}{n^3+(2n)^3} = \frac{4n^2}{9n^3} = \frac{4}{9n}$$
   On a donc
   $$\sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)| = f_n(2n) = \frac{4}{9n}$$
   Il s'agit d'une série de Riemann divergente ($\alpha = 1 \leq 1$)
   Donc la série ne converge pas normalement sur $[0,+\infty[$.
   Sur $[0,a]$ le maximum est en $f_n(a)$ (au moins pour n assez grand)
   $$f_n(a) = \frac{a^2}{n^3+a^3} \sim \frac{a^2}{n^3}$$
   ce qui est le terme général d'une série numérique de Riemann convergente avec $\alpha = 3 > 1$, par conséquent elle converge normalement sur $[0,a]$.
3. Si $x = 0$, $f_n(0) = 0 \to 0$, la série nulle converge.
   Si $x > 0$, $f_n(x) = \frac{x}{n^3+x^3} \sim \frac{x}{n^3}$, ce qui est le terme général d'une série numérique de Riemann convergente avec $\alpha = 3 > 1$
   Donc la série de fonction f_n converge simplement sur $[0,+\infty[$.
   $$f_n'(x) = \frac{n^3+x^3 - x \times 3x^2}{(n^3+x^3)^2} = \frac{n^3-2x^3}{(n^3+x^3)^2}$$
   Il est à peu près clair que les fonctions f_n atteignent leur maximum là où la dérivée s'annule, c'est-à-dire pour

$$x^3 = \frac{n^3}{2} \Leftrightarrow x = 2^{-\frac{1}{3}}n$$

$$f_n\left(2^{-\frac{1}{3}}n\right) = \frac{2^{-\frac{1}{3}}n}{n^3 + \left(2^{-\frac{1}{3}}n\right)^3} = \frac{2^{-\frac{1}{3}}n}{\frac{3}{2}n^3} = \frac{2^{-\frac{4}{3}}}{3n^2}$$

$$\sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)| = \frac{2^{-\frac{4}{3}}}{3n^2}$$

Il s'agit d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 2 > 1$, donc la série de fonction de terme général f_n converge normalement sur $[0, +\infty[$.

Allez à : Exercice 3

Correction exercice 4.

1. Si $x \neq 0$

$$|f_n(x)| \sim \frac{x^2}{n}$$

c'est insuffisant pour la convergence de la série, mais il s'agit d'une série alternée.

On pose $g_n(x) = \frac{x^2}{x^4+n} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$, pour un x fixé, cette suite est décroissante, d'après le TSSA, la suite numérique de terme général $\frac{x^2}{x^4+n}$ converge, au moins pour $x \neq 0$, mais pour $x = 0$, tout est nul, il y a convergence aussi.

2. Il faut utiliser le théorème du TSSA sur la majoration du reste

$$R_n(x) \leq |f_n(x)| = g_{n+1}(x) = \frac{x^2}{x^4 + n + 1}$$

Il suffit de montrer que cette expression tend vers 0 indépendamment de x.

$$g'_{n+1}(x) = \frac{2x(x^4 + n + 1) - x^2 \times 4x^3}{(x^4 + n + 1)^2} = \frac{2x(-2x^4 + n + 1)}{(x^4 + n + 1)^2}$$

Les fonctions g_n sont positives, donc elles atteignent leur max quand la dérivée s'annule.

$$g'_n(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 = \frac{n+1}{2} \Leftrightarrow x = \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$g_{n+1}\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}\right) = \frac{\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2}{\frac{n+1}{2} + n + 1} = \frac{\sqrt{\frac{n+1}{2}}}{\frac{3}{2}(n+1)} = \frac{\sqrt{2}}{3} \times \frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0$$

Ce qui entraine que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} R_n(x) = \frac{\sqrt{2}}{3} \times \frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0$$

Cela montre la convergence uniforme de la série de fonctions f_n.

3. Examinons la convergence normale sur un intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$

Etudions la suite de fonctions

$$|f_n(x)| = g_n(x) = \frac{x^2}{x^4 + n}$$

L'étude de cette fonction a déjà été faite au 2. en remplaçant $n + 1$ par n

Sur $[a, b]$, le maximun est

soit

$$\frac{\sqrt{2}}{3} \times \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sim \frac{\sqrt{2}}{3} \times \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Soit

$$\frac{a^2}{a^4+n} \sim \frac{a^2}{n}$$

Soit

$$\frac{b^2}{b^4+n} \sim \frac{b^2}{n}$$

Qui sont les termes généraux de séries divergentes avec $\alpha = \frac{1}{2} \leq 1$ et $\alpha = 1 \leq 1$, ce qui montre que la série de fonctions de terme général f_n n'est pas absolument convergente, sur un intervalle $[a, b]$.
Pour les intervalles du même type dans $\mathbb{R}^-$ cela ne change rien puisque les fonctions f_n sont paires.

4. Les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}$, la convergente est uniforme sur $\mathbb{R}$ donc la somme est continue sur $\mathbb{R}$.

Allez à : Exercice 4

Correction exercice 5.

Il s'agit d'une série alternée mais le « $(n+1)^3$ » au dénominateur va permettre de montrer la convergence normal sur $\mathbb{R}$

$$|u(x)| = \frac{e^{-nx^2}}{(n+1)^3} \leq \frac{1}{(n+1)^3} < \frac{1}{n^3}$$

$\frac{1}{n^3}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 3 > 1$ donc la série de fonctions de terme général u_n converge normalement sur $\mathbb{R}$, donc uniformément sur $\mathbb{R}$, comme les fonctions u_n sont continues la fonction somme est continue.

Allez à : Exercice 5

Correction exercice 6.

1.

$$\forall x \in [-a, a], \left|\frac{x}{(x^2+n^2)^2}\right| \leq \frac{a}{(x^2+n^2)^2} \leq \frac{a}{n^4}$$

$\frac{1}{n^4}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 3 > 1$ donc la série de fonctions de terme général u_n converge normalement sur $[-a, a]$, donc uniformément sur $[-a, a]$.

2. Les fonctions $x \mapsto \frac{x}{(x^2+n^2)^2}$ sont continues, la série converge uniformément donc la somme est continue.

3. On appelle f_n les fonctions

$$f_n(x) = \frac{1}{x^2+n^2}$$

$$f_n'(x) = -2 \times \frac{x}{(x^2+n^2)^2}$$

Les fonctions f_n sont dérivables
La série de fonctions f_n' converge uniformément sur tout intervalle $[-a, a]$ (voir 1.)
La série numérique $f_n(0) = \frac{1}{n^2}$ converge (c'est une série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$)
Donc la série est dérivable en tout point de $[-a, a]$ (donc sur $\mathbb{R}$) et

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x^2+n^2}\right)' = -2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+n^2)^2}$$

Allez à : Exercice 6

Correction exercice 7.

On pose $f_n(x) = e^{-n} \sin(n^2 x)$, ces fonctions sont dérivable et $f_n'(x) = n^2 e^{-n} \cos(n^2 x)$
La série numérique de terme général $f_n(0) = 0$ converge et enfin

$$|f_n'(x)| \leq n^2 e^{-n}$$

$$n^2(n^2 e^{-n}) = n^4 e^{-n} \to 0$$

La suite numérique de terme général n^2e^{-n} converge grâce aux règles de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$

Cela montre que la série de fonctions f_n' converge normalement sur $\mathbb{R}$ donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

Les trois conditions qui entrainent que la série de fonction de terme général f_n est dérivable sont réunies.

Allez à : Exercice 7

Correction exercice 8.

1.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left|\frac{\sin(nx)}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3}$$

Comme $\frac{1}{n^3}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 3 > 1$, on vient de montrer que la série de fonctions de terme général f_n converge normalement sur $\mathbb{R}$ donc uniformément sur $\mathbb{R}$ et par conséquent simplement sur $\mathbb{R}$

2. Les fonctions f_n sont continues, elles convergent uniformément sur $\mathbb{R}$ donc f est une fonctions continue.

3. La convergence étant uniforme sur $[0, \pi] \subset \mathbb{R}$ et les fonctions f_n étant continues donc intégrables on a

$$\int_0^\pi f(x)dx = \int_0^\pi \sum_{n\geq 1} f_n(x)\, dx = \sum_{n\geq 1}\int_0^\pi f_n(x)dx = \sum_{n\geq 1}\int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n^3}dx$$

On calcule

$$\int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n^3}dx = \frac{1}{n^3}\int_0^\pi \sin(nx)\, dx = \frac{1}{n^3}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^\pi = \frac{1}{n^4}(-\cos(n\pi) + 1) = \frac{1}{n^4}(1 - (-1)^n)$$

Selon que n est pair ou impair $1 - (-1)^n$ est nul ou vaut 2, on va couper la somme en deux

$$\sum_{n\geq 1}\int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n^3}dx = \sum_{n\geq 1}\frac{1 - (-1)^n}{n^4} = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1 - (-1)^{2p}}{(2p)^4} + \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1 - (-1)^{2p+1}}{(2p+1)^4} = 0 + \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{2}{(2p+1)^4}$$

Puis on pose $n = p + 1$, $p = 0 \Rightarrow n = 1$

$$\sum_{n\geq 1}\int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n^3}dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{(2n-1)^4}$$

C'est bien l'égalité demandé.

4. Les fonctions f_n sont dérivables, $f_n'(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2}$, la série de fonctions de terme général f_n converge simplement il reste à montrer que la série de fonction de terme général f_n' converge uniformément sur $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left|\frac{\cos(nx)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$$

La série de fonction de terme général f_n' converge normalement sur $\mathbb{R}$ donc converge uniformément sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer le théorème de dérivation des séries

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2}$$

Remarque : il n'était pas nécessaire de montrer la convergence uniforme de la série de fonction de terme général f_n' sur $\mathbb{R}$, sur un intervalle $[a, b]$ cela suffit.

5. D'après la question précédente

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2} = f'(x)$$

Donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2}\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)dx = f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n^3}$$

Pour les valeurs paires $\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)=0$ donc on va distinguer les valeurs paires de valeurs impaires

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n^3}=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\sin\left(2p\frac{\pi}{2}\right)}{(2p)^3}+\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\sin\left((2p+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2p+1)^3}=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\sin(p\pi)}{(2p)^3}+\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\sin\left(p\pi+\frac{\pi}{2}\right)}{(2p+1)^3}$$
$$=0+\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{(2p+1)^3}=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}$$

Puis on pose $n=p$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2}\right)dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$$

Allez à : Exercice 8

Correction exercice 9.

1. On pose $g_n(x)=|f_n(x)|=\frac{1}{(n+1)(x+1)}$

   La série de fonctions de terme général f_n est une série alternée, on va appliquer le TSSA
   $$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(n+1)(x+1)}=0$$
   La suite $\left(\frac{1}{(n+1)(x+1)}\right)_n$ est décroissante, d'après le TSSA la série de fonctions f_n' converge simplement.

2. D'après le TSSA le reste de la série vérifie
   $$\forall x\in[0,1],\qquad |R_n(x)|\le g_{n+1}(x)=\frac{1}{(n+2)(x+1)}\le\frac{1}{(n+2)(1+1)}=\frac{1}{2(n+2)}$$
   Ce reste est majoré indépendamment de x et tend vers 0, cela montre que la série de fonctions f_n converge uniformément.

3. $$\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)|=\sup_{x\in[0,1]}\frac{1}{(n+1)(x+1)}=\frac{1}{2(n+1)}\sim\frac{1}{2n}$$
   La valeur maximum est atteint pour $x=1$

   $\frac{1}{n}$ est le terme général d'une série Riemann divergente avec $\alpha=1\le1$ donc la série ne converge pas normalement sur $[0,1]$.

Allez à : Exercice 9

Correction exercice 10.

1. Il s'agit de trouver le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ où la série converge simplement,

   Si $x<0$ alors $\frac{ke^{-kx}}{k^2+1}\to+\infty$ lorsque $k\to+\infty$ il n'y a pas convergence.

   Si $x=0$ alors $\left|(-1)^k\frac{k}{k^2+1}\right|\sim\frac{1}{k}$ qui est le terme général d'une série de Riemann divergente avec $\alpha=1\le1$, il n'y a pas de convergence absolue, mais la série est alternée
   $$\left|(-1)^k\frac{k}{k^2+1}\right|=\frac{k}{k^2+1}\to0$$
   Il faut voir si la suite $\left(\frac{k}{k^2+1}\right)$ est décroissante, on pose $a(x)=\frac{x}{x^2+1}$, $a'(x)=\frac{x^2+1-x\times2x}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}<0$ pour $x>1$, cela montre que la suite $\left(\frac{k}{k^2+1}\right)$ est décroissante, d'après le TSSA la série numérique de terme général $(-1)^k\frac{k}{k^2+1}$ est convergente

   Si $x\ge0$ alors
   $$\left|(-1)^k\frac{ke^{-kx}}{k^2+1}\right|\le\frac{ke^{-kx}}{k^2+1}$$

Avec les règles de Riemann et $\alpha = 2 > 1$
$$k^2 \times \frac{ke^{-kx}}{k^2+1} = \frac{k^3 e^{-kx}}{k^2+1} \to 0$$
Lorsque $k \to +\infty$, donc la série numérique de terme général $(-1)^k \frac{ke^{-kx}}{k^2+1}$ est absolument convergente pour $x > 0$, autrement dit la série de fonctions de terme général $(-1)^k \frac{ke^{-kx}}{k^2+1}$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

Conclusion : la série de fonctions de terme général $(-1)^k \frac{ke^{-kx}}{k^2+1}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ et $D = [0, +\infty[$.

On tenter une méthode qui va échouée

Montrons que la convergence est normal sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$
$$\left|(-1)^k \frac{ke^{-kx}}{k^2+1}\right| \leq \frac{ke^{-ka}}{k^2+1}$$
Avec les règles de Riemann et $\alpha = 2 > 1$
$$k^2 \times \frac{ke^{-ka}}{k^2+1} = \frac{k^3 e^{-ka}}{k^2+1} \to 0$$
Lorsque $k \to +\infty$, donc la série numérique de terme général $\frac{ke^{-ka}}{k^2+1}$ est convergente ce qui montre que la série de fonctions de terme général $x \mapsto (-1)^k \frac{ke^{-kx}}{k^2+1}$ converge normalement sur $[a, +\infty[$, et donc uniformément sur $[a, +\infty[$, les fonctions $x \mapsto (-1)^k \frac{ke^{-kx}}{k^2+1}$ étant continues, la somme f est continue sur $[a, +\infty[$, par conséquent la somme est continue sur $]0, +\infty[$. L'ennui c'est que l'on n'a pas la continuité en 0.

Autre méthode en utilisant le TSSA, la série est alternée, il faut montrer que la suite $\left(\frac{ke^{-kx}}{k^2+1}\right)$ est décroissante et qu'elle tend vers 0
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{ke^{-kx}}{k^2+1} = 0$$
Ensuite on pose
$$b(x) = \frac{x}{x^2+1} e^{-kx}$$
$$b'(x) = \left(\frac{x}{x^2+1}\right)' e^{-kx} - k\frac{x}{x^2+1} e^{-kx} = \left(\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} - k\frac{x}{x^2+1}\right) e^{-kx}$$
$$= \frac{1 - x^2 - kx(x^2+1)}{(x^2+1)^2} e^{-kx} = \frac{-kx^3 - x^2 - kx + 1}{(x^2+1)^2} e^{-kx} < 0$$
Au moins dès que x est un peu grand, donc la série numérique de terme général $(-1)^k \frac{ke^{-kx}}{k^2+1}$ converge et le reste vérifie
$$|R_n(x)| \leq \frac{(k+1)e^{-(k+1)x}}{(k+1)^2+1} \leq \frac{(k+1)}{(k+1)^2+1} \to 0$$
On a majoré le reste par une expression indépendante de x et qui tend vers 0 donc la convergence de la série de fonctions de terme général $x \mapsto (-1)^k \frac{ke^{-kx}}{k^2+1}$ est uniforme sur $[0, +\infty[$.

Les fonctions $x \mapsto (-1)^k \frac{ke^{-kx}}{k^2+1}$ sont continues sur $[0, +\infty[$, la convergence est uniforme sur $[0, +\infty[$ donc la somme f est continue.

2. Il s'agit de trouver le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ où la série converge simplement. On pose
$$g_k : x \mapsto (-1)^k \frac{e^{-kx}}{k^2+1}$$

Si $x<0$ alors $\frac{e^{-kx}}{k^2+1}\to+\infty$ lorsque $k\to+\infty$ il n'y a pas convergence.
Si $x\geq 0$ alors

$$\left|(-1)^k\frac{e^{-kx}}{k^2+1}\right|\leq\frac{1}{k^2+1}<\frac{1}{k^2}$$

$\frac{1}{k^2}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente, cela montre, la convergence normale, donc uniforme et par conséquent la converge simple de la série de fonctions de terme général g_k.

$$D'=\mathbb{R}^+$$

$$g_k'(x)=-(-1)^k\frac{ke^{-kx}}{k^2+1}$$

On a vu dans la première question 1. que la série de fonctions de terme général $x\to(-1)^k\frac{ke^{-kx}}{k^2+1}$ convergeait uniformément sur $[0,+\infty[$ donc la série de fonctions de terme général g_k' converge uniformément sur $[0,+\infty[$.
Résumons
Les fonctions g_k sont continues
La série de fonctions de terme général g_k converge simplement sur $[0,+\infty[$
La série de fonctions de terme général g_k' converge uniformément sur $[0,+\infty[$
Donc la somme g est dérivable, il reste à montrer que la dérivée est continue

$$g'(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}g_k'(x)$$

Les fonctions g_k' sont continues, la série de fonction de terme général g_k' converge uniformément sur $[0,+\infty[$ donc la somme g' est continue, par conséquent g est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$.

Allez à : Exercice 10

Correction exercice 11.

1. Si $x=0$, $f_n(0)=\frac{(-1)^n}{n+1}$

   Il s'agit d'une série alternée, la suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)$ tend vers 0 en décroissant donc la série numérique de terme général $\frac{(-1)^n}{n+1}$ converge.

   Si $x>0$,

$$n^2|f_n(x)|=\frac{n^2e^{-nx}}{n+1}\to 0$$

   La série numérique de terme général $f_n(x)$ converge absolument donc elle converge, autrement dit la série de fonctions de terme général f_n converge simplement.

   Conclusion : la série de fonctions de terme général f_n converge simplement sur $[0,+\infty[$.

2. $x\geq a$

$$|f_n(x)|=\frac{e^{-nx}}{n+1}\leq\frac{e^{-na}}{n+1}=\alpha_n$$

$$n^2\frac{e^{-na}}{n+1}\to 0$$

   Avec les règles de Riemann avec $\alpha>1$, cela montre que la série numérique de terme général α_n converge donc la série de fonction de terme général f_n converge normalement sur $[a,+\infty[$.

$$\sup_{x\in[0,+\infty[}|f_n(x)|=\sup_{x\in[0,+\infty[}\frac{e^{-nx}}{n+1}=\frac{1}{n+1}$$

   Or $\frac{1}{n+1}\sim\frac{1}{n}$ est le terme général d'une série de Riemann divergente avec $\alpha=1\leq 1$, donc la série de fonctions de terme général f_n ne converge pas normalement sur $[0,+\infty[$.

$$\sup_{x\in]0,+\infty[}|f_n(x)| = \sup_{x\in]0,+\infty[}\frac{e^{-nx}}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

Cela ne change rien si on ouvre l'intervalle.

3. On va utiliser la majoration du reste du TSSA

$$|R_n(x)| \le |f_{n+1}(x)| = \frac{e^{-nx}}{n+1} < \frac{1}{n+1}$$

Donc

$$\sup_{x\in[0,+\infty[}\left|\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) - \sum_{n=0}^{N} f_n(x)\right| = \sup_{x\in[0,+\infty[}|R_N(x)| < \frac{1}{N+1} \to 0$$

La série de fonctions de terme général f_n converge uniformément sur $[0,+\infty[$.

Allez à : Exercice 11

Correction exercice 12.

- On pose

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2+\sin(nx)}$$

Pour $n \ge 2$

$$f_n(x) \le \frac{1}{n^2-1} \sim \frac{1}{n^2}$$

Or $\frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 2 > 1$.Cela montre que la série de fonctions de terme général f_n converge normalement sur $\mathbb{R}$, donc elle converge uniformément sur $\mathbb{R}$. D'autre part les fonctions f_n sont continues donc f est continue.

- On pose

$$g_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

Pour $n \ge 2$

$$|g_n(x)| \le \frac{1}{n^2}$$

Or $\frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 2 > 1$.Cela montre que la série de fonctions de terme général g_n converge normalement sur $\mathbb{R}$, donc elle converge uniformément sur $\mathbb{R}$. D'autre part les fonctions g_n sont continues donc g est continue.

- On pose

$$h_n(x) = \frac{(-1)^n}{nx+1}$$

Il s'agit d'une série alternée la suite $\left(\frac{1}{nx+1}\right)_n$ est décroissante et tend vers 0 car $x > 0$ donc la série de fonctions de terme général h_n converge simplement vers 0. Grâce aux TSSA nous allons montrer la convergence uniforme de cette série sur $[a,b]$ avec $a > 0$. Le reste vérifie

$$|R_n(x)| \le \frac{1}{(n+1)x+1} \le \frac{1}{(n+1)a+1}$$

Donc

$$\sup_{x\in[a,b]}\left|h(x) - \sum_{n=0}^{N} h_n(x)\right| \le \frac{1}{(n+1)a+1} \to 0$$

Lorsque $n \to +\infty$

Cela montre que la série de fonction de terme général h_n converge uniformément sur $[a,b]$.

En un point $x > 0$, on choisit a et b tels que $a < x < b$, la série de fonction de terme général h_n converge uniformément sur $[a,b]$ et les fonctions h_n sont continues donc h est continue en x et ceci pour tout $x > 0$

Allez à : Exercice 12

Correction exercice 13.

1. Il s'agit d'une série alternée, pour tout $x > 0$, $|f_n(x)| = \frac{1}{n+x}$ tend vers 0 en décroissant, d'après le TSSA, la série numérique de terme général $f_n(x)$ converge, autrement dit la série de fonction de terme général f_n converge simplement.
2. $f_n'(x) = -\frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$ donc
$$|f_n'(x)| \leq \frac{1}{(n+x)^2} < \frac{1}{n^2}$$
$\frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 2 > 1$ donc la série de fonctions de terme général f_n' converge normalement sur $]0, +\infty[$, donc uniformément sur $]0, +\infty[$, comme les fonctions f_n sont dérivable, le théorème de dérivation des série entraine que la somme est dérivable et que
$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$$

Allez à : Exercice 13

Correction exercice 14.

1. Pour $x \leq 0$, $e^{-n^\alpha x}$ ne tend pas vers 0 donc la série diverge.
Pour $x > 0$
D'après les règles de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$
$$\lim_{n\to+\infty} n^2 e^{-n^\alpha x} = 0$$
Entraine que la série numérique de terme général $e^{-n^\alpha x}$ converge, autrement dit la série de fonctions de terme général f_n converge simplement, donc l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Nous allons montrer la convergence uniforme de la série de fonctions de terme général f_n sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.
$$|f_n(x)| \leq e^{-n^\alpha a}$$
D'après les règles de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$
$$\lim_{n\to+\infty} n^2 e^{-n^\alpha a} = 0$$
Entraine que la série numérique de terme général $e^{-n^\alpha a}$ converge, ce qui montre que la série de fonctions de terme général f_n converge normalement sur $[a, +\infty[$, donc uniformément sur $[a, +\infty[$.
Pour un $x > 0$ on choisit a tel que $0 < a < x$, il y a donc convergence uniforme sur $[a, +\infty[$ et les fonctions f_n sont continues en x donc la somme f est continue en x donc sur $]0, +\infty[$.
3. La série de fonctions de terme général f_n converge uniformément sur $[a, +\infty[$ et
$$\forall n \geq 1, \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f_0(x) = 1$$
Entraine que
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

Allez à : Exercice 14

Correction exercice 15.

Convergence de l'intégrale
$$\frac{\sin(x)}{e^x - 1} \sim_0 \frac{x}{x} = 1$$
Donc l'intégrale est convergente en 0

$$x^2\left|\frac{\sin(x)}{e^x-1}\right|\to 0 \quad \text{si} \quad x\to+\infty$$

Donc, d'après les règles de Riemann avec $\alpha>2$ l'intégrale est absolument convergente donc convergente.

Pour utiliser le théorème d'interversion des symboles $\int$ et $\sum$ on va se placer sur un intervalle $[\epsilon,X]$ et on pose

$$I(\epsilon,X)=\int_\epsilon^X\frac{\sin(x)}{e^x-1}dx$$

Autre part

$$\sum_{n=0}^N f_n(x)=\sum_{n=0}^N e^{-(n+1)x}\sin(x)=e^{-x}\sin(x)\sum_{n=0}^N e^{-nx}=e^{-x}\sin(x)\frac{1-e^{(N+1)x}}{1-e^{-x}}$$

$$=\sin(x)\frac{1-e^{(N+1)x}}{e^x(1-e^{-x})}=\sin(x)\frac{1-e^{(N+1)x}}{e^x-1}$$

Et

$$\forall x\in[\epsilon,X],\qquad \sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^N f_n(x)=\frac{\sin(x)}{e^x-1}$$

Les fonctions f_n sont continues sur $[\epsilon,X]$, il suffit que la série de terme général f_n converge uniformément sur $[\epsilon,X]$.

$$|f_n(x)|=e^{-(n+1)x}|\sin(x)|<e^{-(n+1)\epsilon}$$

$e^{-(n+1)\epsilon}=\left(\frac{1}{e^\epsilon}\right)^{n+1}$ est le terme général d'une série géométrique convergente car $\frac{1}{e^\epsilon}\in\left]-1,1\right[$.

Cela montre que la série de terme général f_n converge normalement sur $[\epsilon,X]$ donc uniformément.

$$I(\epsilon,X)=\int_\epsilon^X\frac{\sin(x)}{e^x-1}dx=\int_\epsilon^X\left(\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)\right)dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_\epsilon^X f_n(x)dx\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_\epsilon^X e^{-(n+1)x}\sin(x)\,dx\right)$$

Il existe une primitive de f_n de la forme

$$F_n(x)=(A_n\cos(x)+B_n\sin(x))e^{-(n+1)x}$$

$$F_n'(x)=\big((-(n+1)A_n+B_n)\cos(x)+(-A_n-(n+1)B_n)\sin(x)\big)e^{-(n+1)x}$$

$$F_n'(x)=e^{-(n+1)x}\sin(x)\Leftrightarrow\begin{cases}-(n+1)A_n+B_n=0\\-A_n-(n+1)B_n=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A_n=\dfrac{-1}{1+(n+1)^2}\\[2mm] B_n=\dfrac{-n-1}{1+(n+1)^2}\end{cases}$$

$$\int_\epsilon^X e^{-(n+1)x}\sin(x)\,dx=\left[\left(\frac{-1}{1+(n+1)^2}\cos(x)+\frac{-n-1}{1+(n+1)^2}\sin(x)\right)e^{-(n+1)x}\right]_\epsilon^X$$

$$=\left(\frac{-1}{1+(n+1)^2}\cos(X)+\frac{-n-1}{1+(n+1)^2}\sin(X)\right)e^{-(n+1)X}$$

$$-\left(\left(\frac{-1}{1+(n+1)^2}\cos(\epsilon)+\frac{-n-1}{1+(n+1)^2}\sin(\epsilon)\right)e^{-(n+1)\epsilon}\right)$$

$$I(\epsilon,X)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\left(\frac{-1}{1+(n+1)^2}\cos(X)+\frac{-n-1}{1+(n+1)^2}\sin(X)\right)e^{-(n+1)X}\right.$$
$$\left.-\left(\left(\frac{-1}{1+(n+1)^2}\cos(\epsilon)+\frac{-n-1}{1+(n+1)^2}\sin(\epsilon)\right)e^{-(n+1)\epsilon}\right)\right)$$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{-1}{1+(n+1)^2}\cos(X)+\frac{-n-1}{1+(n+1)^2}\sin(X)\right)e^{-(n+1)X}$$
$$+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+(n+1)^2}\cos(\epsilon)+\frac{n+1}{1+(n+1)^2}\sin(\epsilon)\right)e^{-(n+1)\epsilon}$$

Maintenant il faut faire tendre X vers l'infini dans

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{-1}{1+(n+1)^2}\cos(X)+\frac{-n-1}{1+(n+1)^2}\sin(X)\right)e^{-(n+1)X}$$

Et ϵ vers 0 dans

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+(n+1)^2}\cos(\epsilon)+\frac{n+1}{1+(n+1)^2}\sin(\epsilon)\right)e^{-(n+1)\epsilon}$$

En faisant attention car il s'agit de somme infini

Pour la première limite, on se place sur $[a,+\infty[$, avec $a>0$.

$$\left|\left(\frac{-1}{1+(n+1)^2}\cos(X)+\frac{-n-1}{1+(n+1)^2}\sin(X)\right)e^{-(n+1)X}\right|\le\left(\frac{1}{1+(n+1)^2}+\frac{n+1}{1+(n+1)^2}\right)e^{-(n+1)a}$$

Avec les règles de Riemann

$$n^2\left(\frac{1}{1+(n+1)^2}+\frac{n+1}{1+(n+1)^2}\right)e^{-(n+1)a}\to 0$$

Donc la série de terme général $\left(\frac{-1}{1+(n+1)^2}\cos(X)+\frac{-n-1}{1+(n+1)^2}\sin(X)\right)e^{-(n+1)X}$ converge normalement sur $[a,+\infty[$, donc uniformément sur $[a,+\infty[$, les fonctions $\left(\frac{-1}{1+(n+1)^2}\cos(X)+\frac{-n-1}{1+(n+1)^2}\sin(X)\right)e^{-(n+1)X}$ tendent les 0 lorsque X tend vers l'infini, d'après le théorème de la double limite et

$$\lim_{X\to+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{-1}{1+(n+1)^2}\cos(X)+\frac{-n-1}{1+(n+1)^2}\sin(X)\right)e^{-(n+1)X}$$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\lim_{X\to+\infty}\left(\frac{-1}{1+(n+1)^2}\cos(X)+\frac{-n-1}{1+(n+1)^2}\sin(X)\right)e^{-(n+1)X}\right)=0$$

Pour la seconde cela se complique un peu, et on prend $\epsilon\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ par exemple

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+(n+1)^2}\cos(\epsilon)+\frac{n+1}{1+(n+1)^2}\sin(\epsilon)\right)e^{-(n+1)\epsilon}$$
$$=\cos(\epsilon)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{1+(n+1)^2}e^{-(n+1)\epsilon}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{1+(n+1)^2}\sin(\epsilon)\,e^{-(n+1)\epsilon}$$

Pour la première série

$$\frac{1}{1+(n+1)^2}e^{-(n+1)\epsilon}<\frac{1}{1+(n+1)^2}\sim\frac{1}{n^2}$$

Cette série est normalement convergente sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, donc uniformément convergente, les fonctions « à l'intérieur » sont continue donc la somme est continue et

$$\lim_{\epsilon\to0}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{1+(n+1)^2}e^{-(n+1)\epsilon}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\lim_{\epsilon\to0}\frac{1}{1+(n+1)^2}e^{-(n+1)\epsilon}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{1+(n+1)^2}=\sum_{n'=1}^{+\infty}\frac{1}{1+n'^2}$$

Par conséquent

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(\cos(\epsilon)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{1+(n+1)^2}e^{-(n+1)\epsilon}\right)=\sum_{n'=1}^{+\infty}\frac{1}{1+n'^2}$$

Pour la somme suivante, on va chercher un maximum des fonctions $g_n(x)=\sin(x)\,e^{-(n+1)x}$

$$g_n'(x)=\cos(x)\,e^{-(n+1)x}-(n+1)\sin(x)\,e^{-(n+1)x}=\cos(x)\,e^{-(n+1)x}(1-(n+1)\tan(x))$$

Cette dérivée est positive avant $x=\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)$ et négative après pour des petites valeurs de x, elles atteignent leur maximum en $x=\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)$

Donc

$$0<\frac{n+1}{1+(n+1)^2}\sin(\epsilon)\,e^{-(n+1)\epsilon}\le\frac{n+1}{1+(n+1)^2}g_n\left(\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)$$

$$=\frac{n+1}{1+(n+1)^2}\sin\left(\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)e^{-(n+1)\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)}$$

On pose $n'=n+1$ pour simplifier

$$0<\frac{n+1}{1+(n+1)^2}\sin(\epsilon)\,e^{-(n+1)\epsilon}\le\frac{n'}{1+n'^2}\sin\left(\arctan\left(\frac{1}{n'}\right)\right)e^{-n'\arctan\left(\frac{1}{n'}\right)}$$

$$=\frac{n'}{1+n'^2}\sin\left(\frac{1}{n'}+o\left(\frac{1}{n'}\right)\right)e^{-n'\left(\frac{1}{n'}+o\left(\frac{1}{n'}\right)\right)}=\frac{n'}{1+n'^2}\left(\frac{1}{n'}+o\left(\frac{1}{n'}\right)\right)e^{-1+o(1)}\sim\frac{1}{n'^2}$$

La série de fonctions terme général $\frac{n+1}{1+(n+1)^2}\sin(\epsilon)\,e^{-(n+1)\epsilon}$ converge normalement sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ donc uniformément sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, ces fonctions sont continues donc la somme est continue et

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{1+(n+1)^2}\sin(\epsilon)\,e^{-(n+1)\epsilon}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\lim_{\epsilon\to 0}\frac{n+1}{1+(n+1)^2}\sin(\epsilon)\,e^{-(n+1)\epsilon}=\sum_{n=0}^{+\infty}0=0$$

Finalement

$$\lim_{\substack{X\to+\infty\\ \epsilon\to 0}}I(\epsilon,X)=\sum_{n'=1}^{+\infty}\frac{1}{1+n'^2}$$

Or l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{e^x-1}dx$ est convergente donc

$$\lim_{\substack{X\to+\infty\\ \epsilon\to 0}}I(\epsilon,X)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{e^x-1}dx$$

Donc

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{e^x-1}dx=\sum_{n'=1}^{+\infty}\frac{1}{1+n'^2}$$

Allez à : Exercice 15

Séries entières

Exercice 1. Soit

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Une série entière. On suppose qu'elle diverge pour $z = 3 + 4i$ et qu'elle converge pour $z = 5i$. Quel est son rayon de convergence ?

Allez à : Correction exercice 1

Exercice 2. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+3)!\, z^n \,; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n \,; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n \,; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} z^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n \,; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} z^n \,; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n+1} z^{3n+1} \,; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (1+i)^n z^n$$

Allez à : Correction exercice 2

Exercice 3. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (n-1) 2^n z^n \,; \quad f_2(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+1}{3^n} z^n \,; \quad f_3(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

$$f_4(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2} z^n \,; \quad f_5(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n-1}{n^2+1} z^n \,; \quad f_6(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^2} z^{2n}$$

$$f_7(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^{2n+1} \,; \quad f_8(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^n \,; \quad f_9(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^\alpha z^n \,, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Allez à : Correction exercice 3

Exercice 4.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R

Déterminer le rayon de convergence de la série entière suivante :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{2n}$$

Allez à : Correction exercice 4

Exercice 5.

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$$

1. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
2. Etudier la convergence en $-R$ et en R.

Allez à : Correction exercice 5

Exercice 6.

Développer les fonctions suivantes en séries entières de x :

1. $f : x \to \frac{1}{(1-x)(2+x)}$

2. $f: x \to \frac{1}{1+x+x^2}$
3. $f: x \to \ln(x^2+x+1)$

Allez à : Correction exercice 6

Exercice 7.

Soit f définie sur $]-1,1[$ par

$$f(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

1. Justifier que f est développable en série entière sur $]-1,1[$.
2. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $(1-x^2)y' - xy = 1$.
3. Déterminer le développement en série entière de f sur $]-1,1[$.

Allez à : Correction exercice 7

Exercice 8.

1. Déterminer f solution de l'équation différentielle $x^2y'' + 4xy' + (2-x^2)y - 1 = 0$
2. Reconnaitre f.

Allez à : Correction exercice 8

Exercice 9.

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière dont le rayon de convergence est strictement positif. On note f sa somme sur $]-R, R[$.

1. Trouver des conditions nécessaires et suffisantes portant sur les coefficients a_n pour que f satisfasse l'équation différentielle
$$xf''(x) + 2f'(x) + xf(x) = 0$$
2. On suppose ces conditions vérifiées. Déterminer les a_n lorsque $a_0 = 1$.
3. Quelle est la valeur de R ? Quelle est la fonction f obtenue ?

Allez à : Correction exercice 9

Exercice 10.

On considère la série complexe de somme

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$$

Où les a_n sont définis par :

$$a_0 = 1, a_1 = 3, \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2 \quad a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$$

1. Montrer que le rayon de convergence de cette série est supérieur ou égal à $\frac{1}{4}$.
2. Montrer que $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < R$
$$f(z) = \frac{1}{2z^2 - 3z + 1}$$
3. En déduire la valeur de, R, ainsi que l'expression de a_n en fonction de n.

Allez à : Correction exercice 10

Exercice 11.

On définit la suite (a_n) par $a_0 = 1$ et par la relation de récurrence

$$2a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k a_{n-k}$$

Et on pose $b_n = \frac{a_n}{n!}$

1. Montrer que $|a_n| \leq \frac{n!}{2^n}$, en déduire que le rayon de convergence de la série entière de terme général $b_n x^n$ n'est pas nul.
2. On appelle $S(x)$ la somme de cette série, calculer $S'(x)$ en fonction de $S(x)$.
3. En déduire $S(x)$

Allez à : Correction exercice 11

Exercice 12. Intégration

Montrer que :

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^2}$$

Allez à : Correction exercice 12

Corrections

Correction exercice 1.

La série entière diverge pour $z = 3 + 4i$ donc son rayon de converge $R \leq |3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

La série entière converge pour $z = 5i$ donc son rayon de converge $R \geq |5i| = 5$

Donc $R = 5$

Allez à : Exercice 1

Correction exercice 2.

- $a_n = (-1)^n (n+3)!$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+4)!}{(n+3)!} = n + 4 \to +\infty$$

Donc $R = 0$

Allez à : Exercice 2

- $a_n = n^n$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = n \to +\infty$$

Donc $R = 0$

Allez à : Exercice 2

- $a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} = \frac{(2n+2)!\,n!\,n!}{(n+1)!\,(n+1)!\,(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!\,n!\,n!}{(n+1)n!\,(n+1)n!\,(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} \to 4$$

Donc $R = \frac{1}{4}$

Allez à : Exercice 2

- $a_n = \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{\ln(n+1)}{\ln(n+2)}}{\frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}} = \frac{(\ln(n+1))^2}{\ln(n)\ln(n+2)}$$

Il est presque évident que la limite est 1, on va quand même faire un effort

$$\ln(n+1)=\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln(n)\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right)\sim\ln(n)$$

De même

$$\ln(n+2)\sim\ln(n)$$

Donc

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\sim\frac{(\ln(n))^2}{\ln(n)\ln(n)}=1\to 1$$

Donc $R=\frac{1}{1}=1$

Allez à : Exercice 2

- $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

$$\sqrt[n]{a_n}=\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=e^{n\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}=e^{1+o(1)}\to e$$

Donc $R=\frac{1}{e}$

Allez à : Exercice 2

- $a_n=\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}$, notons que $1+\frac{(-1)^n}{n}\geq 0$

$$\sqrt[n]{a_n}=\left(\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}=\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^n=e^{n\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)}=e^{n\left(\frac{(-1)^n}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=e^{(-1)^n+o(1)}}$$

Cette expression n'a pas de limite, on voit bien qu'il va falloir séparer les n pairs et les n impairs

$$\sum_{n=1}^{+\infty}a_nx^n=\sum_{p=1}^{+\infty}a_{2p}x^{2p}+\sum_{p=0}^{+\infty}a_{2p+1}x^{2p+1}=\sum_{p=1}^{+\infty}a_{2p}(x^2)^p+x\sum_{p=0}^{+\infty}a_{2p+1}(x^2)^p$$

On pose

$$\alpha_p=a_{2p}=\left(1+\frac{(-1)^{2p}}{2p}\right)^{(2p)^2}=\left(1+\frac{1}{2p}\right)^{4p^2}$$

$$\beta_p=a_{2p+1}=\left(1+\frac{(-1)^{2p+1}}{2p+1}\right)^{(2p+1)^2}=\left(1-\frac{1}{2p+1}\right)^{4p^2+4p+1}=\left(1-\frac{1}{2p+1}\right)\left(1-\frac{1}{2p+1}\right)^{4p^2+4p}$$
$$=\frac{2p}{2p+1}\left(1-\frac{1}{2p+1}\right)^{4p^2+4p}$$

Cherchons les rayons de convergence de ces deux séries

$$\sqrt[n]{\alpha_p}=\left(1+\frac{1}{2p}\right)^{4p}=e^{4p\ln\left(1+\frac{1}{2p}\right)}=e^{4p\left(\frac{1}{2p}+o\left(\frac{1}{p}\right)\right)}=e^{2+o(1)}\to e^2$$

Le rayon de convergence de la série entière de terme général α_pX^p est $\frac{1}{e^2}$, donc le rayon de convergence de la série entière de terme général α_px^{2p} est $R_1=\frac{1}{e}$.

$$\sqrt[p]{\beta_p}=\left(\frac{2p}{2p+1}\left(1-\frac{1}{2p+1}\right)^{4p^2+4p}\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\frac{2p}{2p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(1-\frac{1}{2p+1}\right)^{4p+4}$$
$$=\left(\frac{2p}{2p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(1-\frac{1}{2p+1}\right)^4\left(1-\frac{1}{2p+1}\right)^{4p}$$

$$\lim_{p\to+\infty}\left(\frac{2p}{2p+1}\right)^{\frac{1}{p}}=1$$

$$\lim_{p\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2p+1}\right)^4=1$$

$$\left(1-\frac{1}{2p+1}\right)^{4p}=e^{4p\ln\left(1-\frac{1}{2p+1}\right)}=e^{4p\left(-\frac{1}{2p+1}+o\left(\frac{1}{p}\right)\right)}=e^{\frac{-4p}{2p+1}+o\left(\frac{1}{p}\right)}\to\frac{1}{e^2}$$

Donc $\sqrt[p]{\beta_p}\to\frac{1}{e^2}$

Le rayon de convergence de la série entière de terme général $\beta_p X^p$ est e^2, donc le rayon de convergence de la série entière de terme général $\alpha_p x^{2p}$ est $R_2=e$.

La série entière de terme général $a_n x^n$ est la somme de ces deux séries donc son rayon de convergence est

$$R=\min(R_1,R_2)=\frac{1}{e}$$

Allez à : Exercice 2

- $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n+1}z^{3n+1}=z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n+1}(z^3)^n$$

On va chercher le rayon de convergence de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n+1}X^n$$

$a_n=\frac{(-2)^n}{n+1}$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{\left|\frac{(-2)^{n+1}}{n+2}\right|}{\left|\frac{(-2)^n}{n+1}\right|}=\frac{n+1}{n+2}\to 1$$

La série entière de terme général $a_n X^n$ a pour rayon de convergence $R=\frac{1}{1}=1$

La série

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n+1}(z^3)^n$$

Converge pour $|z^3|<1\Leftrightarrow|z|<1$ et diverge pour $|z^3|>1\Leftrightarrow|z|>1$

Son rayon de convergence est 1.

Allez à : Exercice 2

- $a_n=(1+i)^n$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{|(1+i)^{n+1}|}{|(1+i)^n|}=|1+i|=\sqrt{2}\to\sqrt{2}$$

Le rayon de convergence de la série entière de terme général $(1+i)^n z^n$ est $R=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Allez à : Exercice 2

Correction exercice 3.

1. Soit $a_n=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(n-1)2^n$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{\left|(-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}n2^{n+1}\right|}{\left|(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(n-1)2^n\right|}=\frac{n2^{n+1}}{(n-1)2^n}=2\frac{n}{n-1}\to 2$$

Donc le rayon de convergence est $R=\frac{1}{2}$

Allez à : Exercice 3

2. Soit $a_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(n-1)2^n$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\left|(-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} n 2^{n+1}\right|}{\left|(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(n-1)2^n\right|} = \frac{n2^{n+1}}{(n-1)2^n} = 2\frac{n}{n-1} \to 2$$

Donc le rayon de convergence est $R = \frac{1}{2}$.

Allez à : Exercice 3

3. Soit $a_n = \frac{1}{n!}$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{n+1} \to 0$$

Donc le rayon de convergence est $R = +\infty$

$$f_3(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n = e^z$$

Allez à : Exercice 3

4. Soit $a_n = e^{-n^2}$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{e^{-(n+1)^2}}{e^{-n^2}} = e^{n^2-(n+1)^2} = e^{-2n-1} \to 0$$

Donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.

Ou

$$\sqrt[n]{|a_n|} = e^{-n} \to 0$$

Allez à : Exercice 3

5. Soit $a_n = \frac{n-1}{n^2+1}$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{n}{(n+1)^2+1}}{\frac{n-1}{n^2+1}} = \frac{n(n^2+1)}{((n+1)^2+1)(n-1)} \to 1$$

Donc le rayon de convergence est $R = 1$.

Allez à : Exercice 3

6. Soit $a_n = \frac{\ln(n)}{n^2}$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}}{\frac{\ln(n)}{n^2}} = \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \times \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} \times \frac{n^2}{(n+1)^2}$$

$$= \frac{\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \times \frac{n^2}{(n+1)^2} \to 1$$

Donc le rayon de convergence est $R = \frac{1}{1} = 1$.

Allez à : Exercice 3

7.

$$f_7(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^{2n+1} = z\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^{2n} = z\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} X^n$$

Avec $x = z^2$

Soit $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$

$$\frac{|a_{n+1}|}{[a_n|}=\frac{\left|\frac{(-1)^{n+2}}{n+2}\right|}{\left|\frac{(-1)^n}{n+1}\right|}=\frac{n+1}{n+2}\to 1$$

Donc le rayon de convergence de la série entière de terme général $\frac{(-1)^n}{n+1}X^n$ est $R=\frac{1}{1}$

Et le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}z^{2n}$ est $R'^2=R=1$, donc $R'=1$.

Allez à : Exercice 3

8. Soit $a_n=\frac{(3n)!}{(n!)^3}$

$$\frac{|a_{n+1}|}{[a_n|}=\frac{\left|\frac{(3(n+1))!}{((n+1)!)^3}\right|}{\left|\frac{(3n)!}{(n!)^3}\right|}=\frac{(3(n+1))!}{(3n)!}\times\frac{(n!)^3}{((n+1)!)^3}=\frac{(3n+3)!}{(3n)!}\times\frac{(n!)^3}{((n+1)n!)^3}=$$

$$=\frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(3n)!}{(3n)!}\times\frac{(n!)^3}{(n+1)^3(n!)^3}=\frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^3}$$

$$\to 3^3=27$$

Donc

$$R=\frac{1}{27}$$

Allez à : Exercice 3

9. Soit $a_n=n^\alpha$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha\to 1$$

Donc le rayon de convergence est $R=\frac{1}{1}$.

Allez à : Exercice 3

Correction exercice 4.

$$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^{2n}=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nX^n$$

Cette série entière converge pour $|X|<R$ et diverge pour $|X|>R$, autrement dit cette série converge pour $|z^2|<R$ et diverge pour $|z^2|>R$ donc le rayon de convergence est $\sqrt{R}$.

Allez à : Exercice 4

Correction exercice 5.

1. Si $|x|<1$

$$\left|\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n\right|\le x^n$$

Et la série de terme général x^n converge.

Si $|x|>1$

$$\left|\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n\right|\sim\frac{1}{\sqrt{n}}|x|^n=\frac{1}{\sqrt{n}}e^{n\ln|x|}\to+\infty$$

Le terme général de la série ne tend pas vers 0 donc la série diverge

Donc le rayon de convergence de la série entière de terme général $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n$ a pour rayon de convergence $R=1$.

2. Si $x=1$

La série numérique de terme général $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ qui est le terme général d'une suite de Riemann diverge avec $\alpha = \frac{1}{2} \leq 1$, la série diverge.

Si $x = -1$

$(-1)^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est le terme général d'une série alternée, manifestement la suite $\left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$ est décroissante car si on pose

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \sin\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

Alors

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\cos\left(x^{-\frac{1}{2}}\right) < 0$$

De plus elle tend vers 0, d'après le TSSA, la série de terme général $(-1)^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est convergente.

Allez à : Exercice 5

Correction exercice 6.

Dans cet exercice on ne s'intéresse pas aux rayons de convergence (pourtant il y aurait à dire) donc les égalités seront à l'intérieur du rayon de convergence que l'on espérera non nul.

1.

$$\frac{1}{(1-x)(2+x)} = \frac{\frac{1}{3}}{1-x} + \frac{\frac{1}{3}}{2+x} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{x}{2}} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1-x} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{1+\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2^n}\right)x^n$$

2.

$$\frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1}{(x-j)(x-j^2)} = \frac{a}{x-j} + \frac{\overline{a}}{x-j^2}$$

$$a = \left[\frac{1}{x-j^2}\right]_{x=j} = \frac{1}{j-j^2} = \frac{1}{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{1}{i\sqrt{3}} = -\frac{i\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{1}{1+x+x^2} = \frac{-\frac{i\sqrt{3}}{3}}{x-j} + \frac{\frac{i\sqrt{3}}{3}}{x-j^2} = -\frac{i\sqrt{3}}{3}\frac{1}{j(xj^2-1)} + \frac{i\sqrt{3}}{3}\frac{1}{j^2(xj-1)} = -\frac{ij^2\sqrt{3}}{3}\frac{1}{xj^2-1} + \frac{ij\sqrt{3}}{3}\frac{1}{xj-1}$$

$$= \frac{ij^2\sqrt{3}}{3}\frac{1}{1-xj^2} - \frac{ij\sqrt{3}}{3}\frac{1}{1-xj} = \frac{ij^2\sqrt{3}}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(xj^2)^n - \frac{ij\sqrt{3}}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(xj)^n$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(ij^2(j^2)^n - ijj^n)x^n = \frac{\sqrt{3}}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(i(j^2)^{n+1} - ij^{n+1})x^n$$

On peut arranger $i(j^2)^{n+1} - ij^{n+1}$

$$i(j^2)^{n+1} - ij^{n+1} = i((j^2)^n - j^n) = i\left(e^{-i\frac{2(n+1)\pi}{3}} - e^{i\frac{2(n+1)\pi}{3}}\right) = i\left(-2i\pi\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 2\pi\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{3}\right)$$

$$\frac{1}{1+x+x^2} = 2\pi\frac{\sqrt{3}}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{3}\right)x^n$$

3. $f(x) = \ln(x^2+x+1)$ entraine que

$$f'(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+1}=2\pi\frac{\sqrt{3}}{3}(2x+1)\sum_{n=0}^{+\infty}\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{3}\right)x^n$$

D'après la question précédente, alors

$$f'(x)=2\pi\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}2\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{3}\right)x^{n+1}+\sum_{n=0}^{+\infty}\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{3}\right)x^n\right)$$

Dans la première somme on pose $n'=n+1$, $n=0\Rightarrow n'=1$,

$$f'(x)=2\pi\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\sum_{n'=1}^{+\infty}2\sin\left(\frac{2n'\pi}{3}\right)x^{n'}+\sum_{n=0}^{+\infty}\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{3}\right)x^n\right)$$

Puis on change n' en n

$$f'(x)=2\pi\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}2\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)x^n+\sum_{n=0}^{+\infty}\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{3}\right)x^n\right)$$

$$=2\pi\frac{\sqrt{3}}{3}\left(2\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)x+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(2\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{3}\right)\right)x^n\right)$$

On en déduit que

$$f(x)=f(0)+2\pi\frac{\sqrt{3}}{3}2\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)x+2\pi\frac{\sqrt{3}}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(2\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{3}\right)\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

On a $f(0)=0$ et on fait un changement de varible $n'=n+1$, puis on rechange n' par n

$$f(x)=-2\pi\frac{\sqrt{3}}{3}x+2\pi\frac{\sqrt{3}}{3}\sum_{n=2}^{+\infty}\left(2\sin\left(\frac{2(n-1)\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right)\frac{x^n}{n}$$

Allez à : Exercice 6

Correction exercice 7.

1.

$$X\to(1-X)^{-\frac{1}{2}}$$

Est une fonction qui admet un développement en série entière sur $|X|<1$, donc

$$x\to\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Est une fonction qui admet un développement en série entière sur $|x^2|<1$, donc sur $|x|<1$

$$x\to\arcsin(x)$$

A pour dérivée $x\to\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ qui admet un développement en séries entières sur $|x|<1$ donc arcsin admet un développement en séries entières sur $|x|<1$, pour finir le produit de deux séries admettant des développements en séries entières sur $|x|<1$ admet un développement en séries entières sur $|x|<1$.

Allez à : Exercice 7

2.

$$f(x)=\arcsin(x)\times(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x)=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\times(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}+\arcsin(x)\times\left(-\frac{1}{2}\right)(-2x)(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{1}{1-x^2}+\arcsin(x)\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{1-x^2}+f(x)\frac{x}{1-x^2}$$

Par conséquent

$$(1-x^2)f'(x)=1+xf(x)$$

C'est bien ce que demandait de montrer l'énoncé.

Allez à : Exercice 7

3. On pose

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\Rightarrow f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$

$$(1-x^2)f'(x)-xf(x)=1\Leftrightarrow f'(x)-x^2f'(x)+xf(x)=1$$

$$\Leftrightarrow\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-x^2\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}-x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=1$$

$$\Leftrightarrow\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=1\quad(*)$$

Le but va être un « x » dans chaque somme

Dans la seconde somme on pose $n'=n+1$, $n=0\Rightarrow n'=1$

$$\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n+1}=\sum_{n'=1}^{\infty}(n'-1)a_{n'-1}x^{n'}$$

Puis on remplace n' par n

$$\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)a_{n-1}x^n$$

Dans la troisième somme on pose $n'=n+1$, $n=0\Rightarrow n'=1$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=\sum_{n'=1}^{\infty}a_{n'-1}x^{n'}$$

Puis on remplace n' par n

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n$$

On remplace tout cela dans $(*)$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)a_{n-1}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n=1$$

On réunit ces trois sommes à partir de $n=1$, pour cela on va séparer le terme $n=0$ de la première somme des autres termes

$$a_1+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)a_{n-1}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n=1$$

Donc

$$a_1+\sum_{n=1}^{\infty}\big((n+1)a_{n+1}-(n-1)a_{n-1}-a_{n-1}\big)x^n=1\Leftrightarrow a_1+\sum_{n=1}^{\infty}\big((n+1)a_{n+1}-na_{n-1}\big)x^n=1$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\forall n\geq 1,(n+1)a_{n+1}-na_{n-1}=0\\ a_1=1\end{cases}$$

$$n\geq 1,\qquad (n+1)a_{n+1}-na_{n-1}=0\Leftrightarrow n\geq 2,\qquad na_n-(n-1)a_{n-2}=0\quad(**)$$

On va distinguer n pair et n impair

- $n=2p$

$$(**)\Leftrightarrow 2pa_{2p}=(2p-1)a_{2(p-1)}$$

Comme $f(0)=0$ on a $a_0=0$, puis par une récurrence très simple, a_{2p} est nul.

- $n=2p+1$

$$(**)\Leftrightarrow(2p+1)a_{2p+1}=2pa_{2p-1}\Leftrightarrow a_{2p+1}=\frac{2p}{2p+1}a_{2p-1}$$

Comme on connait $a_1=1$, on peut en déduire $a_3=\frac{2\times 1}{2\times 1+1}a_{2\times 1-1}=\frac{2}{3}a_1$,etc…

Il reste à trouver la « formule » donnant a_{2p+1} pour tout $p \geq 0$

$$a_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} a_{2p-1}$$

Si on remplace p par $p-1$

$$a_{2p-1} = \frac{2(p-1)}{2p-1} a_{2p-3}$$

Puis par $p-2$

$$a_{2p-3} = \frac{2(p-2)}{2p-3} a_{2p-5}$$

Jusqu'à $p = 2$

$$a_5 = \frac{2 \times 2}{2 \times 2 + 1} a_3$$

Puis $p = 1$

$$a_3 = \frac{2 \times 1}{2 \times 1 + 1} a_1$$

On n'a plus qu'à multiplier toutes ces égalités, les termes en « a_{2p-k} » s'éliminent

$$a_{2p+1} = \frac{2^p p!}{(2p+1)(2p-1) \dots 5 \times 3} a_1$$

On peut améliorer ce résultat en multipliant en haut et en bas par

$$2p(2p-2) \dots 4 \times 2 = 2^p p!$$

De façon à « boucher » les trous en bas pour reconstituer $(2p+1)!$

$$a_{2p+1} = \frac{2^p p!\, 2^p p!}{(2p+1)2p(2p-1)(2p-2) \dots 5 \times 4 \times 3 \times 2} a_1 = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$$

Il reste à écrire le développement en série entière

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p} x^{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1} x^{2p+1} = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1} x^{2p+1} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} x^{2p+1}$$

Il faut quand même vérifier que cette égalité est valable sur tout $]-1,1[$, pour cela il faut trouver le rayon de convergence de la série, reprendre $\frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$, c'est assez maladroit, il vaut mieux reprendre l'égalité

$$a_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} a_{2p-1} \Leftrightarrow \frac{a_{2p+1}}{a_{2p-1}} = \frac{2p}{2p-1} \to 1$$

Donc $R = \frac{1}{1} = 1$.

Ce n'est pas exactement $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ mais pour une série lacunaire (qui a des trous, c'est-à-dire les a_{2p} ici) c'est bien ainsi que cela marche.

Allez à : Exercice 7

Correction exercice 8.

1. On pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\Rightarrow f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

$$\Rightarrow f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) n a_{n+1} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$$

Pour obtenir un x^n dans $x^2 f''(x)$ on va utiliser la première expression de la dérivée seconde.

Pour obtenir un x^n dans $xf'(x)$ on va utiliser la première expression de la dérivée.
Pour $f(x)$ on n'a pas le choix

$$x^2f''(x)+4xf'(x)-(2-x^2)f(x)-1=0 \Leftrightarrow x^2f''(x)+4xf'(x)+2f(x)-x^2f(x)-1=0$$

$$\Leftrightarrow x^2\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}+4x\sum_{n=0}^{\infty} na_nx^{n-1}+2\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n-x^2\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n-1=0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_nx^n+4\sum_{n=0}^{\infty} na_nx^n+2\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{n+2}-1=0$$

Pour les trois premières sommes tout va bien on a des « x^n », pour la dernière, c'est plus compliqué, on pose $n'=n+2$, $n=0\Rightarrow n'=2$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{n+2}=\sum_{n'=2}^{\infty} a_{n'-2}x^{n'}$$

Puis on remplace n' par n

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{n+2}=\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n$$

On remplace

$$x^2f''(x)+4xf'(x)-(2-x^2)f(x)-1=0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_nx^n+4\sum_{n=0}^{\infty} na_nx^n+2\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n-\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n-1=0$$

Pour réunir ces quatre sommes en une seule, il va falloir partir de $n=2$, donc isoler les termes en $n=0$ et $n=1$ dans les trois premières sommes

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_nx^n=0\times(-1)\times a_0x^0+1\times 0\times a_1x+\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^n=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} na_nx^n=0\times a_0x^0+1\times a_1x+\sum_{n=2}^{\infty} na_nx^n=a_1x+\sum_{n=2}^{\infty} na_nx^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n=a_0+a_1x+\sum_{n=2}^{\infty} a_nx^n$$

On remplace

$$x^2f''(x)+4xf'(x)-(2-x^2)f(x)-1=0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^n+4\left(a_1x+\sum_{n=2}^{\infty} na_nx^n\right)+2\left(a_0+a_1x+\sum_{n=2}^{\infty} a_nx^n\right)-\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n-1=0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=2}^{\infty}(n(n-1)a_n+4na_n+2a_n-a_{n-2})x^n+4a_1x+2a_0+2a_1x-1=0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=2}^{\infty}\big((n^2-n+4n+2)a_n-a_{n-2}\big)x^n+6a_1x+2a_0-1=0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=2}^{\infty}\big((n^2+3n+2)a_n-a_{n-2}\big)x^n+6a_1x+2a_0-1=0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=2}^{\infty}\big((n+1)(n+2)a_n-a_{n-2}\big)x^n+6a_1x+2a_0-1=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n\geq 2, (n+1)(n+2)a_n-a_{n-2}=0 \quad (*) \\ 6a_1=0 \\ 2a_0-1=0 \end{cases}$$

On va distinguer deux cas, n pair et n impair

- $n = 2p + 1$

$$(*) \Leftrightarrow (2p+2)(2p+3)a_{2p+1} = a_{2p-1}$$

Comme $a_1 = 0$ tous les a_{2p+1} sont nuls.

- $n = 2p$

$$(*) \Leftrightarrow (2p+1)(2p+2)a_{2p} = a_{2(p-1)}$$
$$\Leftrightarrow a_{2p} = \frac{1}{(2p+2)(2p+1)} a_{2(p-1)}$$

Puis on remplace p par $p - 1$

$$a_{2(p-1)} = \frac{1}{2p(2p-1)} a_{2(p-2)}$$

Puis par $p - 2$

$$a_{2(p-2)} = \frac{1}{(2p-2)(2p-3)} a_{2(p-3)}$$

Jusqu'à $p = 2$

$$a_4 = \frac{1}{6 \times 5} a_2$$

Et enfin $p = 1$

$$a_2 = \frac{1}{4 \times 3} a_0 = \frac{1}{4 \times 3 \times 2}$$

On multiplie toutes ces lignes, les « $a_{2(p-k)}$ » se simplifient

$$a_{2p} = \frac{1}{(2p+2)!}$$

Il reste à écrire le développement en série entière

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p} x^{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1} x^{2p+1} = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p} x^{2p} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+2)!} x^{2p}$$

Il faut quand même regarder où cette égalité est valable

$$a_{2p} = \frac{1}{(2p+2)(2p+1)} a_{2(p-1)} \Leftrightarrow \frac{a_{2p}}{a_{2(p-1)}} = \frac{1}{(2p+2)(2p+1)} \to 0$$

Donc $R = +\infty$.

Ce n'est pas exactement $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ mais pour une série lacunaire (qui a des trous, c'est-à-dire les a_{2p} ici) c'est bien ainsi que cela marche.

Allez à : Exercice 8

2. Si $x \neq 0$

$$f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+2)!} x^{2p} = \frac{1}{x^2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+2)!} x^{2p+2} = \frac{1}{x^2} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{2p!} x^{2p}$$

En posant $p' = p + 1$, puis en renommant p' par p.

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{2p!} x^{2p} = \frac{1}{x^2} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2p!} x^{2p} - 1 \right) = \frac{\mathrm{ch}(x) - 1}{x^2}$$

Si $x = 0$

$$f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+2)!} 0^{2p} = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$$

Allez à : Exercice 8

Correction exercice 9.

1.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

$$\Rightarrow f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$

$$\Rightarrow f''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)na_{n+1}x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

Pour obtenir un « x^n » dans $f'(x)$ on va prendre la seconde expression

Pour obtenir un « x^n » dans $xf''(x)$ on va utiliser la seconde expression

$$xf''(x)=x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)na_{n+1}x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)na_{n+1}x^n$$

$$xf(x)=x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}$$

On pose $n'=n+1$, $n=0\Rightarrow n'=1$

$$xf(x)=\sum_{n'=1}^{\infty}a_{n'-1}x^{n'}$$

Puis on change n' en n

$$xf(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n$$

On remplace cela dans

$$xf''(x)+2f'(x)+xf(x)=0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)na_{n+1}x^n+2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n=0$$

On va pouvoir regrouper ces trois sommes à partir de $n=1$, donc dans les deux premières on va isoler les termes pour $n=0$.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)na_{n+1}x^n=1\times 0\times a_1x^0+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)na_{n+1}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)na_{n+1}x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n=1\times a_1x^0+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n=a_1+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$

On remplace

$$xf''(x)+2f'(x)+xf(x)=0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)na_{n+1}x^n+2a_1+2\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n=0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\big((n+1)na_{n+1}+2(n+1)a_{n+1}+a_{n-1}\big)x^n+2a_1=0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\big((n+1)(n+2)a_{n+1}+a_{n-1}\big)x^n+2a_1=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\forall n\geq 1, (n+1)(n+2)a_{n+1}+a_{n-1}=0\\ 2a_1=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall n \geq 1, a_{n+1} = -\dfrac{a_{n-1}}{(n+1)(n+2)} \\ 2a_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall n \geq 2, a_n = -\dfrac{a_{n-2}}{n(n+1)} \\ 2a_1 = 0 \end{cases}$$

On va distinguer le cas n pair et le cas n impair.

- Si $n = 2p + 1$, comme $a_1 = 0$ tous les termes $a_{2p+1} = 0$
- Si $n = 2p$

$$\forall n \geq 2, a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+1)} \Leftrightarrow \forall p \geq 1, a_{2p} = -\frac{a_{2(p-1)}}{2p(2p+1)}$$

$$a_{2p} = -\frac{a_{2(p-1)}}{2p(2p+1)}$$

On change p en $p - 1$

$$a_{2(p-1)} = -\frac{a_{2(p-2)}}{(2p-2)(2p-1)}$$

En $p - 2$

$$a_{2(p-2)} = -\frac{a_{2(p-3)}}{(2p-4)(2p-3)}$$

$p = 2$

$$a_4 = -\frac{a_2}{4 \times 5}$$

$p = 1$

$$a_2 = -\frac{a_0}{2 \times 3} = -\frac{1}{2 \times 3}$$

On multiplie ces p lignes, les $a_{2(p-k)}$ s'éliminent

$$a_{2p} = \frac{(-1)^p}{(2p+1)!}$$

Il reste à écrire le développement en série entière

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p} x^{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1} x^{2p+1} = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p} x^{2p} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p}$$

Allez à : Exercice 9

2.

$$|a_{2p}| = \frac{|a_{2(p-1)}|}{2p(2p+1)} \Leftrightarrow \frac{|a_{2p}|}{|a_{2(p-1)}|} = \frac{1}{2p(2p+1)} \to 0$$

Donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.

Si $x \neq 0$

$$f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p} = \frac{1}{x} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p+1} = \frac{\sin(x)}{x}$$

Si $x = 0$,

$$f(0) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} 0^{2p} = \frac{(-1)^0}{(2 \times 0 + 1)!} = 1$$

Allez à : Exercice 9

Correction exercice 10.

1. Montrons par récurrence que $|a_n| < 4^n$

   L'inégalité est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$, supposons la vraie pour a_{n-2} et a_{n-1} alors

$$|a_n| = |3a_{n-1} - 2a_{n-2}| < 3|a_{n-1}| + 2|a_{n-2}| < 3 \times 4^{n-1} + 2 \times 4^{n-2} = 4^{n-2}(3 \times 4 + 2)$$
$$= 4^{n-2} \times 14 < 4^{n-2} \times 16 = 4^n$$

On pose $b_n = 4^n$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{4^{n+1}}{4^n} = 4 \to 4$$

Donc le rayon de converge de la série entière de terme général $b_n z^n$ est $\frac{1}{4}$, comme $|a_n| < b_n$ le rayon de converge de la série entière de terme général $a_n z^n$ est supérieur ou égal à $\frac{1}{4}$.

2.

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n = a_0 + a_1 z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n = 1 + 3z + \sum_{n=2}^{+\infty} (3a_{n-1} - 2a_{n-2}) z^n =$$
$$= 1 + 3z + 3\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-1} z^n - 2\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} z^n$$

Dans la première somme on pose $n' = n - 1$, $n = 2 \Rightarrow n' = 1$, dans la deuxième on pose $n'' = n - 2$, $n = 2 \Rightarrow n'' = 0$

$$f(z) = 1 + 3z + 3\sum_{n'=1}^{+\infty} a_{n'} z^{n'+1} - 2\sum_{n''=0}^{+\infty} a_{n''} z^{n''+2}$$

Puis on change n' et n'' en n

$$f(z) = 1 + 3z + 3\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^{n+1} - 2\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^{n+2} = 1 + 3z + 3z\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n - 2z^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$
$$= 1 + 3z + 3z\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n - a_0\right) - 2z^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n =$$
$$= 1 + 3z + 3z(f(z) - 1) - 2z^2 f(z) = 1 + 3z f(z) - 2z^2 f(z)$$

D'où l'on déduit que

$$f(z) - 3z f(z) + 2z^2 f(z) = 1$$

Ce qui équivaut à

$$f(z)(1 - 3z + 2z^2) = 1$$

Ou encore

$$f(z) = \frac{1}{2z^2 - 3z + 1}$$

3.

$$f(z) = \frac{1}{2z^2 - 3z + 1} = \frac{1}{2(z-1)\left(z - \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{z-1} + \frac{-1}{z - \frac{1}{2}} = \frac{-1}{1-z} + \frac{2}{1-2z}$$
$$= -\sum_{n=0}^{+\infty} z^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n z^n$$

On pose $\alpha_n = 1$

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1 \to 1$$

Donc le rayon de convergence de la série de terme général z^n est $R_1 = \frac{1}{1} = 1$

On pose $\beta_n = 2^n$

$$\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 \to 2$$

Donc le rayon de convergence de la série de terme général z^n est $R_2 = \frac{1}{2}$

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{+\infty} z^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1 + 2^{n+1}) z^n$$

On en déduit que le rayon de convergence de la série entière de terme général $(-1 + 2^{n+1})z^n$ est

$$R = \min(R_1, R_2) = \frac{1}{2}$$

Allez à : Exercice 10

Correction exercice 11.

1. $|a_n| \leq \frac{n!}{2^n}$ est vraie pour $n = 0$, supposons que l'inégalité est vraie pour tout $k' \in \{0,1, \ldots, n\}$, alors

$$2a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k a_{n-k} \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k!}{2^k} \frac{(n-k)!}{2^{n-k}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \frac{k!}{2^k} \frac{(n-k)!}{2^{n-k}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{2^n} = \frac{n!}{2^n} \sum_{k=0}^{n} 1$$
$$= \frac{n!}{2^n}(n+1) = \frac{(n+1)!}{2^n}$$

Puis on divise par 2

$$a_{n+1} \leq \frac{(n+1)!}{2^{n+1}}$$

Ce qui achève la récurrence.

$$|b_n| = \frac{|a_n|}{n!} \leq \frac{\frac{(n+1)!}{2^{n+1}}}{n!} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$$

On pose

$$\alpha_n = \frac{n+1}{2^{n+1}}$$
$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{\frac{n+2}{2^{n+2}}}{\frac{n+1}{2^{n+1}}} = \frac{n+2}{n+1} \times \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$$

Donc le rayon de convergence de la série entière de terme général $\alpha_n x^n$ est 2, comme $|b_n| \leq \alpha_n$ le rayon de convergence de la série entière de terme général $b_n x^n$ est supérieur ou égal à 2.

2.

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = b_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$$

On pose $n' = n - 1$ dans la somme, $n = 1 \Rightarrow n' = 0$

$$S(x) = b_0 + \sum_{n'=0}^{+\infty} b_{n'+1} x^{n'+1}$$

Puis on change n' en n

$$S(x) = b_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} b_{n+1} x^{n+1}$$

Cette petite manipulation permet de faire apparaitre $b_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{n!}$ Ce qui est suggéré par l'énoncé puisque l'on a a_{n+1} en fonction d'autres « $a_{k'}$ »

$$S(x) = \frac{a_0}{0!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_{n+1}}{(n+1)!} x^{n+1} = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k a_{n-k}\, x^{n+1} \right)$$

Allons-y maintenant on peut dériver, on aurait pu le faire avant mais là, on est bien

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(n+1)\binom{n}{k}a_k a_{n-k}\,x^n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n!}\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k a_{n-k}\,x^n\right)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k a_{n-k}\,x^{n-k}x^k\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!\,(n-k)!}a_k a_{n-k}x^{n-k}x^k\right)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k x^k}{k!}\frac{a_{n-k}x^{n-k}}{(n-k)!}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}b_k x^k b_{n-k}x^{n-k}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}b_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}b_n x^n\right)=\frac{1}{2}\big(S(x)\big)^2$$

Car ces séries convergent absolument à l'intérieur du cercle de convergence.

3. Cela donne

$$\frac{S'(x)}{\big(S(x)\big)^2}=\frac{1}{2}\Rightarrow-\frac{1}{S(x)}=\frac{1}{2}x+K,\quad K\in\mathbb{R}$$

Soit

$$S(x)=-\frac{1}{\frac{1}{2}x+K}$$

Or

$$s(0)=\sum_{n=0}^{+\infty}b_n x^n=b_0=\frac{a_0}{0!}=1$$

Ce qui entraine que $K=-1$ et finalement

$$S(x)=\frac{-1}{\frac{1}{2}x-1}=\frac{1}{2-x}$$

Allez à : Exercice 11

Correction exercice 12.

Il faut faire attention au fait que l'intégrale est une intégrale généralisée en 0, avec les règles de Riemann en 0 avec $\alpha=\frac{1}{2}<1$

$$\sqrt{x}\,\frac{\ln(x)}{1+x^2}\to 0$$

Montre que l'intégrale est convergente

D'autre part

$$\forall x\in[0,1[,\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}$$

Pour pouvoir appliquer la formule qui permet d'invertir les symboles $\int$ et $\sum$ il faut se placer sur un intervalle borné où la fonction est continue et où on peut appliquer la formule ci-dessus, on pose

$$I(\epsilon,X)=\int_{\epsilon}^{X}\frac{\ln(x)}{1+x^2}dx=\int_{\epsilon}^{X}\left(\ln(x)\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}\right)dx=\int_{\epsilon}^{X}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}\ln(x)\right)dx$$

C'est faisable mais pas simple du tout, alors on va faire autrement en faisant une intégration par partie de

$\int_\epsilon^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx$	
$u'(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$u(x) = \arctan(x)$
$v(x) = \ln(x)$	$v'(x) = \frac{1}{x}$
$\int_\epsilon^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx = [\ln(x)\arctan(x)]_0^1 -$	$\int_\epsilon^1 \frac{\arctan(x)}{x} dx$

$$\int_\epsilon^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx = [\ln(x)\arctan(x)]_\epsilon^1 - \int_\epsilon^1 \frac{\arctan(x)}{x} dx$$

On vérifie que ces trois termes sont bien convergents.

$$[\ln(x)\arctan(x)]_\epsilon^1 = \ln(1)\arctan(1) - \ln(\epsilon)\arctan(\epsilon) = -\ln(\epsilon)\arctan(\epsilon) \sim -\epsilon\ln(\epsilon) \to 0$$

On en déduit que

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{\arctan(x)}{x} dx$$

Le développement en série entière de $\arctan(x)$ est

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

On a un problème en $x = 1$, la série est alternée, $\frac{1}{2n+1}$ tend vers 0 en étant décroissante donc la série de terme général $\frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge on a donc

$$\forall x \in]-1,1], \qquad \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

Et

$$\forall x \in]-1,1], \frac{\arctan(x)}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1}$$

Il faut montrer la convergence uniforme de la série de fonction de terme général $\frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1}$ sur $[0,1]$. Il s'agit d'une série alternée, on va utiliser la majoration du reste du TSSA

$$\forall x \in [0,1], \qquad |R_n(x)| \le \frac{x^{2(n+1)}}{2n+3} \le \frac{1}{2n+3} \to 0$$

Cela montre la convergence uniforme de la série de fonctions de terme général $\frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1}$ sur $[0,1]$.

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{\arctan(x)}{x} dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \int_0^1 x^{2n} dx$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

Allez à : Exercice 12